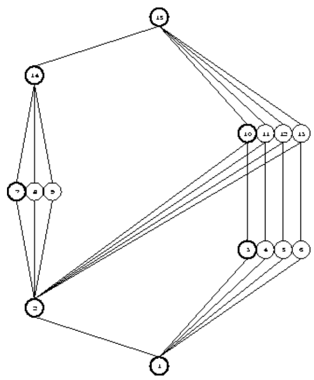
Monomiale Charaktere, B–Gruppen und GAP

Doktoraalscriptie Wiskunde
van
Roderik C. Lindenbergh



Scriptiebegeleider
Dr. R.W. van der Waall

Universiteit Van Amsterdam
Faculteit der Wiskunde en Informatica
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Doctoraalscriptie für Mathematik
an der
Universiteit Van Amsterdam,

entstanden
an der

Lehrstuhl D für Mathematik
Rheinisch Westfälische Technische Hochschule
Aachen, Deutschland

Januar-Juli 1994

Betreuer
Dr. R.W. van der Waall

Mitbetreuer
T. Breuer

30. August 1994

Inhaltsverzeichnis

1. Die Zerlegung von Chi's in monomiale Charaktere 8

1.1 Brauers Problem 8
1.2 Die Berechnung monomialer Charakteren mit GAP 10
1.3 Die Berechnung der Chi's mit dem Untergruppenverband 12
1.4 Permutationscharaktere und Markentafeln 12
1.5 Die Berechnung der Chi's mit der Markentafel 15
1.6 Die Zerlegung in monomiale Charaktere 16
1.7 Die alten Beispiele 17
1.7.1 SL(2,3). 17
1.7.2 GL(2,3) 18
1.7.3 A5 20
1.8 Die Gruppe 48.50 22
1.9 GL(3,2) 24
1.10 A6 24
1.11 Schlußfolgerung 26

2. Monomialität und Primitivität irreduzibler Charaktere in einfachen Gruppen. 27

2.1 MP 27
2.2 Einfache Gruppen in MP 28
2.3 Zwei einfache Gruppen außerhalb MP: SL(3,3) und A8 30
2.4 Schlußfolgerung 32

3. B-Gruppen 33

3.1 B–Gruppen, Einführung 33
3.2 Klassifikation auflösbarer B–Gruppen 35
3.2.1 SL(2,3) $\ltimes$ (Z5 x Z5) 36
3.2.2 SL(2,3) $\ltimes$ (Z11 x Z11) 36
3.2.3 (SL(2,3) x Z5) $\ltimes$ (Z11 x Z11) 37
3.3 Klassifikation nicht-auflösbarer B–Gruppen 38

3.3.1 SL(2,5) $\ltimes$ (Z11 x Z11) 39
3.3.2 SL(2,5) $\ltimes$ (Z19 x Z19) 39
3.3.3 Der allgemeine Fall 39
3.4 Schlußfolgerung 43

A. Appendix **44**
A.1 Prozeduren 44
A.1.1 Ein Programm für die Berechnung von monomialen Charakteren 44
A.1.2 Ein Programm für die Berechnung von Permutationscharakteren 47
A.1.3 Ein Programm für die Berechnung von Chi's mit dem Untergruppenverband 48
A.1.4 Ein Programm für die Berechnung von Chi's mit der Markentafel 49
A.1.5 Einige Prozeduren für die Zerlegung von Chi's in Monomialen 51
A.2 Beispiele 53
A.2.1 Herkunft der Chi's der Gruppe SL(2,3) 53
A.2.2 Das Bilden einer kurzen Permutationsdarstellung 56

Bezeichnungen

Es sei vorausgesetzt, daß alle Gruppen in dieser Arbeit endlich sind, und alle zu betrachtenden einfachen Gruppen nichtabelsch. Gruppentheoretische Objekte sind meistens wie im Buch von Isaacs [8] und wie im ATLAS [4] notiert. Für uns wichtige Teile der Charaktertafeln sind wie in GAP notiert. Auf den ersten Zeilen einer Charaktertafel sind die Ordnungen der Zentralisatoren gegeben, geordnet pro Primzahl. Zweitens folgt eine Zeile mit den Namen der Konjugationsklassen, gefolgt von den Charakteren. Falls wichtig werden in der letzten Zeile Abkürzungen für nicht–rationale Eingaben erklärt, wobei die letzte Eingabe immer der Notation im ATLAS [4] entspricht. Mit dem Index einer Untergruppe H der Gruppe G ist der Index $|G : H|$ gemeint. Z_n wird immer eine zyklische Gruppe der Ordnung n bezeichnen.

Mit $A.B$ wird im allgemeinen jede Gruppe G bezeichnet, in der A ein Normalteiler von G ist, und die Faktorgruppe $G/A \cong B$ ist. Man nennt $A.B$ oft eine aufwärtse Erweiterung von A mit B. Man nennt die Erweiterung zerfallend genau dann wenn $A.B$ das semidirekte Produkt von A mit B ist. Sonst heiß die Erweiterung nicht-zerfallend. Ein semidirektes Produkt wird notiert mit $A : B$ oder $B \ltimes A$. Ein direktes Produkt von b Kopien der Gruppe Z_a werden wir auch bezeichnen mit a^b.

$PSL(a, b)$, sowie $L(a, b)$, sowie $L_a(b)$ bezeichnen die projektive spezielle lineare Gruppe von Dimension $(a - 1)$ über $\mathbb{F}_b$.

Vorprogrammierte GAP–Funktionen werden immer in Maschinenschrift gesetzt. Mehr über diese Funktionen kann man in dem (On-Line) GAP–Manual lesen.

Vorwort

Ab 15. Januar bis zum 15. Juli habe ich an der Lehrstuhl D für Mathematik der Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule in Aachen, Deutschland, studiert. Aus meinen dortigen Tätigkeiten ist diese Diplomarbeit entstanden.

Direkter Anlaß hierzu war im August 1993 die Teilnahme am 'Workshop on Computational Group Theory', auf dem 'Groups–'93'–Kongreß in Galway, Irland. Da machte ich zum erstenmal zu GAP Bekanntschaft. GAP, ' Groups, Algorithms, and Programming ', ist ein Computeralgebrasystem, ähnlich wie MAPLE organisiert, aber speziel fürs Rechnen mit Gruppen und verwandten Strukturen entworfen.

GAP besteht, kurz erklärt, aus einer Programmiersprache, in der man selber Algorithmen implementieren kann, aus einer Bibliothek von GAP–Funktionen, wozu schon eine Vielzahl an Algorithmen implementiert worden ist, aus einer Datei mit Daten über Gruppen und mit Charaktertafeln, und schließlich aus einem Manual von etwa 1000 Seiten, in dem alles erklärt wird. GAP ist und wird hauptsächlich von den Mitarbeitern und Studenten des Lehrstuhls D, unter der Leitung von Herrn Professor Dr. J. Neubüser, entwickelt.

Mein Betreuer, Herr Dr. R.W. van der Waall hat mir einige Probleme im Bereich der Gruppen– und Darstellungstheorie gegeben, wofür es zweckmäßig schien, GAP zu benützen. Nach Beurteilung dieser Problemen in Aachen, konnte ich dort Mitte Januar anfangen.

Das erste Problem bezieht sich auf die Frage ob ein spezieller Charakter, Chi, auf eine besondere Art und Weise zerlegbar in monomiale Charaktere ist. Dieses Problem hat seinen Ursprung in einem Problem von R. Brauer über Quotienten von Dedekind–zeta–Funktionen. Zu dieser Frage habe ich einige Prozeduren geschrieben, unter anderem fürs Bestimmen aller monomialen und Chi Charaktere einer Gruppe. Auch habe ich die Theorie der Markentafeln studiert und angewendet für dieses Problem. Nach der Entwicklung der Prozeduren war ich imstande alte und neue Beispiele zu erledigen.

Beim zweiten Problem geht es um die Herkunft irreduzibler Charaktere gewisser einfacher Gruppen. Mit Hilfe des 'Atlas of Finite Groups', [4], und einiger GAP–Funktionen habe ich die erste neunzehn Gruppen aus dem Atlas auf die MP–Eigenschaft getestet. Eine Gruppe liegt innerhalb der Klasse MP, wenn alle nichtlinearen irreduziblen Charaktere entweder monomial oder primitiv sind. Auch zeige ich, daß es eine Alternierende Gruppe A_m, mit m gerade, m $>$ 4, gibt mit einem nicht-linearen irreduziblen Charakter, der nicht primitiv ist.

Im letzten Kapitel wird für sieben Gruppen gezeigt, daß alle Untergruppen gleicher Ordnung miteinander konjugiert sind. Mit GAP zeigte ich das für fünf Gruppen. Es war Herr Dr. R.W. van der Waall, der einen theoretischen Beweis formulierte in dem er für die nicht-auflösbaren der sieben zeigt, daß sie die obige Eigenschaft erfüllen. Auch Herr Dr. Klaus Lux hat einen Beweis formuliert, basierent auf Ideen aus der modularen Darstellungstheorie. Damit bin ich aber weniger vertraut und deswegen habe ich den gruppentheoretischen Beweis bevorzugt.

Es hat sich herausgestellt, daß GAP ein kräftiges Werkzeug fürs Erzielen vieler Beispiele ist. Es hat mir auch viel Vergnügen bereitet meine theoretische Kenntnisse, die ich mir während meines Studiums angeeignet habe, mit Hilfe GAP auf nicht–triviale, echte Gruppen anwenden zu können. Mein Betreuer in Aachen, Herr Thomas Breuer, hat mir viele ' Tricks' ' zum Benutzen von GAP und dem ATLAS gezeigt. Er hat mich auch schnell mit **Group Characters** versehen, die jetzt von ihm in GAP–3.4 implementiert worden sind.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. J. Neubüser, der meinen Aufenthalt in Aachen ermöglicht hat, Herrn Thomas Breuer, der immer für Fragen zur Verfügung gestanden hat, Herrn Edward van Dokkum, der diesen Text auf Deutsch–Fehler kontrolliert hat, und den Herren Andreas Hoppe, Dr. Klaus Lux, Martin Schönert und Elmar Wings, die alle geholfen haben. Natürlich gilt mein Dank insbesondere Herrn Dr. R.W. van der Waall, der mich über die e–mail betreut hat und alles mögliche gemacht hat fürs Gelingen meines Studiumendes.

Amsterdam, 30. August 1994.

1. Die Zerlegung von Chi's in monomiale Charaktere

1.1 Brauers Problem

Zu einem Zahlenkörper K kann man die sogenannte Dedekind-Zeta-Funktion definieren: Es sei $\wp$ ein Ideal von K, und p eine Primzahl in $\mathbb{Q}$, mit $\wp|p$. Es sei $\mathbf{N}\wp := p^{f_\wp}$ wo $f_\wp$ den Grad von $\wp$ markiert. Dann wird die Dedekind-Zeta-Funktion von K gegeben von

$$\zeta_K(s) \quad := \quad \prod_{\wp} \frac{1}{1-\frac{1}{\mathbf{N}\wp^s}}; \qquad Re(s) \geq 1$$

Nach Hecke [6] kann $\zeta_K(s)$ analytisch erweitert werden in $\mathbb{C}$, mit Ausnahme genau eines Pols, im Punkt $s=1$. Wenn zwei Zahlenkörper K und L gegeben sind, so kann man definieren

$$\zeta_{K,L}(s) \quad := \quad \frac{\zeta_{KL}(s).\zeta_{K\cap L}(s)}{\zeta_K(s).\zeta_L(s)}$$

R. Brauer erörtete die Frage, ob $\zeta_{K,L}$ eine ganze Funktion sei (in $\mathbb{C}$). Wir werden dazu sagen, daß in diesem Fall das Brauersche Problem eine bestätigende Antwort hat.

Einen Zugang zu diesem Problem liefert uns die der Erweiterung entsprechende Galoisgruppe. Von dieser Galoisgruppe können wir die Darstellungen und die Charaktere betrachten. Die Theorie der Artin-L-Reihen ergibt eine Verbindung zwischen den Charakteren der Galoisgruppe und den Dedekind-Zeta-Funktionen der beteiligten Zahlenkörper. Beweise und Weiteres über die Theorie der Artin–L–Reihen findet man unter anderem in [10]. Betrachte eine galoissche Erweiterung K/k, mit Galoisgruppe G. Es sei 1_G der triviale Charakter von G; $Char(G)$ bezeichnet die Menge der Charaktere von G. Wichtige Eigenschaften der Artinschen L-Reihen sind

1. $L(s, 1_G, K/k) \quad = \quad \zeta_k(s)$
2. $L(s, \chi_1 + \chi_2, K/k) \quad = \quad L(s, \chi_1, K/k).L(s, \chi_2, K/k)$, für $\chi_1, \chi_2 \in CHAR(G)$
3. Es sei F ein Zwischenkörper $k \subset F \subset K$ und $\psi \in CHAR(Gal(K/F))$. Dann $L(s, \psi, K/F) \quad = \quad L(s, \psi^G, K/k)$.

Sei nun gegeben irgendeine galoissche Erweiterung A/K mit Galoisgruppe G, und zwei Zwischenkörper E und F von A/K mit zugehörigen Untergruppen $H \leftrightarrow A/E$ und $T \leftrightarrow A/F$. Dann ergibt sich aus obigen Eigenschaften daß

$$
\begin{aligned}
\zeta_{E,F} &= \frac{\zeta_{EF}.\zeta_{E\cap F}}{\zeta_E.\zeta_F} \\
&= \frac{L(s,1_{H\cap T},A/EF).L(s,1_{<H,T>},A/E\cap F)}{L(s,1_H,A/E).L(S,1_T,A/F)} \\
&= L(s,(1_{H\cap T}{}^{<H,T>}+1_{<H,T>}-(1_H)^{<H,T>}-(1_T)^{<H,T>},A/E\cap F).
\end{aligned}
$$

Im Einklang damit definieren wir die Klassenfunktion $Chi(H,T)$.

Definition 1.1 $Chi(H,T) := (1_{H\cap T})^{<H,T>} + 1_{<H,T>} - (1_H)^{<H,T>} - (1_T)^{<H,T>}$.

Definition 1.2 *Es sei μ ein Charakter der Gruppe G. Man nennt μ einen monomialen Charakter von G wenn es eine Untergruppe $H \leq G$ und einen linearen Charakter λ von H gibt derart, daß μ von λ induziert wird. Falls es $H \leq G$ gibt mit $(1_H)^G = \mu$, so nennt man μ einen Permutationscharakter von G.*

Weiterhin wird die Menge der monomialen Charaktere einer Gruppe G auch mit $MON(G)$ notiert, und die Menge der linearen Charaktere einer Gruppe mit $LIN(G)$.

Es ist bekannt, daß die Artin-L-Reihe eines monomialen Charakters μ eine ganze Funktion ist, falls μ den trivialen Charakter der Gruppe $< H,T >$ nicht als irreduziblen Konstituenten enthält. Wenn wir also für einen $Chi = Chi(H,T)$ zeigen können, daß

$$Chi = \sum a_i\mu_i, \qquad a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \qquad \mu_i \in MON(< H,T >),$$

dann erhalten wir, daß die dem Chi entsprechende Artinsche L–Funktion holomorph ist. In Zukunft werden wir immer eine feste Gruppe G und alle zugehörige Chi-Klassenfunktionen betrachten. Das heißt: Wir werden in Definition 1.1 immer die Lage betrachten wo $< H,T >= G$, und dann die zugehörige Chi–Klassenfunktion $Chi = Chi(H,T)$ bilden. Man kann eben zeigen, daß Chi ein Charakter von G ist. Dazu brauchen wir einen Satz von R. Brauer:

Satz 1.3 (R. Brauer) *Es sei χ ein Charakter von G so daß $[\chi,1_G]=0$. Seien A und B zwei Untergruppen von G derart, daß*

$$[\chi_A,1_A]+[\chi_B,1_B] \qquad > \qquad [\chi_{A\cap B},1_{A\cap B}],$$

dann erzeugen A und B eine echte Untergruppe von G.

Beweis [8] theorem 5.19 ||

Folgerung 1.4 *Chi ist ein Charakter von G.*

Beweis Sei $A \leq G$. Aus dem Frobeniusschen Reziprozitätssatz sieht man gleich, daß 1_G genau einmal vorkommt in der Zerlegung von $(1_A)^G$ in irreduzible Komponenten:

$$[(1_A)^G,1_G] \quad = \quad [1_A,(1_G)_A] \quad = \quad [1_A,1_A] \quad = \quad 1.$$

Es folgt also daß $[Chi,1_G]=0$. Chi ist ein Charakter genau dann, wenn

$$[(1_{H\cap T})^G,\chi_i] \qquad \geq \qquad [(1_H)^G+(1_T)^G,\chi_i]$$

für alle $\chi_i \epsilon IRR(G), \chi_i \neq 1_G$. Da wir vorausgesetzt haben, daß H und T die ganze Gruppe G erzeugen und 1_G nicht in Chi vorkommt, können wir Brauers Satz umgekehrt anwenden auf jeden Charakter χ_i , und wir sehen, daß

$$\begin{aligned}
[(1_{H\cap T})^G, \chi_i] &= [(\chi_i)_{H\cap T}, 1_{H\cap T}] \\
&\geq [(\chi_i)_H, 1_H] + [(\chi_i))_T, 1_T] \\
&= [(1_H)^G, \chi_i] + [(1_T)^G, \chi_i].
\end{aligned}$$

zutrifft. ||

Wir haben gesehen, daß das Brauersche Problem eine bestätigende Antwort hat für zwei Untergruppen H und T, welche die ganze Gruppe G erzeugen, falls $Chi = Chi(H,T)$ eine Zerlegung hat wie

$$Chi \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu_i, \quad a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \mu_i \in MON(G).$$

Wenn Chi so zu schreiben ist, so nennen wir Chi $MON - \mathbb{Q}$. Wenn es eine Zerlegung gibt mit $a_i \in \mathbb{N}$, so nennen wir Chi $MON - \mathbb{N}$.

In [14] haben R.W. van der Waall und K. Sato für gewisse Gruppen G und für gewisse Arten von Untergruppen H und T von G bewiesen, daß $Chi(H,T)$ in eine solche Form zu zerlegen ist:

- Sei G eine auflösbare Gruppe, $H, T \leq G : G \neq H, G \neq T, G = HT$, dann ist $Chi(H,T)$ $MON - \mathbb{N}$.
- Sei G eine auflösbare Gruppe. Seien H und T zwei maximale Untergruppen von G, dann ist $Chi(H,T)$ $MON - \mathbb{N}$.

Sie haben aber auch gezeigt, daß es Gruppen G gibt, auflösbare und nicht-auflösbare, mit Untergruppen H und T so daß $G = \langle H, T \rangle$ wofür NICHT gilt, daß $Chi(H,T)$ $MON - \mathbb{Q}$ ist: Sie haben solche Beispiele gefunden in $SL(2,3)$, A_5 und $GL(2,3)$. In diesen Fällen gibt es aber nur sehr wenig verschiedene Chi's, die nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind. Deshalb ist es interessant zu sehen was bei ähnlichen, etwas größeren Gruppen geschieht. In diesem Kapitel werde ich mich weiterhin beschäftigen mit dem Nachprüfen obiger Gruppen und außerdem werde ich betrachten, was in den Gruppen 48.50, $GL(3,2)$ und A_6 passiert. Dazu habe ich Prozeduren für GAP geschrieben. Für die Zerlegung von Chi's in monomiale Charaktere wird zuerst eine Methode fürs Berechnen der monomialen Charaktere einer Gruppe beschrieben.

1.2 Die Berechnung monomialer Charakteren mit GAP

Wenn wir mit den monomialen Charakteren einer Gruppe G zu tun haben , können wir folgendermaßen vorgehen.

1. Bilde alle Klassen $\tilde{H}$ von konjugierten Untergruppen von G.
2. Wähle aus jeder Klasse $\tilde{H}$ einen Repräsentant H.
3. Bestimme $LIN(H)$.

4. Induziere jede $\lambda \in LIN(H)$ hoch nach G.

5. (Zerlege λ^G in irreduzible Charaktere von G)

Ad 1) : Bemerke, daß Charaktere konstant auf Konjugiertenklassen sind und deshalb brauchen wir Ad 2) nur eine Untergruppe aus jeder Klasse zu nehmen. Die in diesem Kapitel zu betrachtenden Gruppen sind relativ klein: Für Gruppen mit einer Ordnung kleiner als 5000 kann GAP den Untergruppenverband ohne weiteres berechnen mit dem `Lattice`–Befehl.

Ad 3): Wenn wir die Kommutatoruntergruppe H' von H kennen, können wir $|LIN(H)|$ berechnen :

$$|LIN(H)| \quad = \quad |H : H'|.$$

Da wir aber trotzdem die Charaktertafeln von den Repräsentanten brauchen, um mit den linearen Charakteren zu rechnen, können wir diese Zahl auch einfach aus den Tafeln lesen, die wir wieder leicht von GAP bekommen: Um die Charaktertafel einer Gruppe zu bestimmen, rechnet GAP in einem Primkörper $\mathbb{F}_p$, wo p eine Primzahl ist, die die nächste Bedingungen erfüllt: der Exponent von G , definiert als das kleinste gemeinsame Vielfaches der Ordnungen der Elemente von G, teilt $(p-1)$, und außerdem gilt: $2\sqrt{|G|} < p$. GAP kann mit Primkörper bis zur Ordnung $p = 65519$ rechnen.

Ad 4) : Um GAP das Hochinduzieren eines Charakters einer Untergruppe H nach G zu ermöglichen, soll man wissen wie die Konjugationsklassen von H in den Konjugationsklassen von G liegen. Dies kann berechnet werden mit Hilfe der Funktion `FusionConjugacyClasses`. Dann benützt es in `Induced` die bekannte Formel

$$\varphi^G(g) \quad = \quad \frac{|\mathbf{C}_G(g)|}{|H|} \sum_{x_i} \varphi(x_i) |Cl_H(x_i)|,$$

$g \in G$, φ ein Character aus H, $\{x_i\}$ ein Repräsentantensystem für die Klassen von H, die enthalten sind in der Klasse $Cl(g)$. Siehe [8], Seite 64, und bemerke, daß $|Cl_G(g)| = |G : \mathbf{C}_G(g)|$.

Ad 5) : Da wir wissen, daß jeder Charakter einer eindeutigen Zerlegung in irreduzible Charaktere entspricht und vollständig von seinen Werten auf den Konjugationsklassen von G bestimmt wird, brauchen wir 5) nicht unbedingt. Die Ergebnisse aber werden viel übersichtlicher, und deshalb werde ich hier und auch später bei anderen Charakteren immer zerlegen in Irreduzible. Für das Zerlegen unterscheide ich zwei Fälle: Hochinduzierte Charaktere mit und ohne irrationale Entries. Im rationalen Fall muß man erst die sogenannte rationalisierte Charaktertafel berechnen , die man aus der normalen Tafel dadurch bekommt, daß man konjugierte Charaktere zusammenzählt: $\psi_j = \sum \chi_i$. Man kann jetzt diese neue Tafel betrachten als Koeffizientenmatrix M für die Matrixgleichung:

$$x * M \quad = \quad t$$

wobei mit t den mit dem zu zerlegenden Charakter übereinstimmenden Vektor angedeutet wird. Der Lösungsvektor x entspricht jetzt den Vielfachkeiten r_j der Zerlegung $\lambda^G = \sum_i r_i \psi$ in die rationalisierten irreduziblen Charaktere ψ_j von G, und daß sind auch die Muliplizitäten n_i in der Zerlegung in Irreduzibelen. Im nicht-rationalen Fall brauchen wir nicht zu rationalisieren, und bekommen wir wie oben eine Matrizengleichung, wo jetzt M der Charaktertafel entspricht. Wenn man diese Gedanken zusammennimmt, kann man leicht eine Prozedur schreiben, womit sich die monomialen Charaktere einer (kleinen) Gruppe berechnen lassen. So eine Prozedur ist aufgenommen im Anhang A.

1.3 Die Berechnung der Chi's mit dem Untergruppenverband

Für das Berechnen aller möglichen *Chi*'s habe ich in meiner Arbeit zwei Wege benutzt: Einen sicheren, aber sehr langsamen Weg, und einen schnellen Weg, wobei man sicher ist, daß alle *Chi*'s in der Antwort stehen, aber, wozu es gut möglich ist, daß auch falsche Klassenfunktionen dazwischen stehen, die nicht den Anforderungen der Definition von *Chi* entsprechen. Der langsame Weg besteht im Grunde darin, daß man sich alle Paare von Untergruppen (H, T) ansieht und entscheidet ob (H, T) einen $Chi(H, T)$ erzeugt. Ich setze voraus daß mir einer Liste von allen Untergruppen H von G und die zugehörigen Permutationscharakteren $(1_H)^G$ zur Verfügung steht:

1. Nimm zwei Untergruppen H und T aus G.
2. Berechne ob $G =< H, T >$.
3. Falls $< H, T >\neq G$: Gehe zurück nach 1.
4. Bilde $H \cap T$.
5. Bilde Chi.

Oben haben wir schon gesehen, wie wir die monomialen Charaktere einer Gruppe berechnen können. Ähnlich können wir natürlich die Permutationscharaktere bilden. In GAP gibt es auch den Befehl `PermChars`. Dieser Befehl gibt aber eine Liste von Kandidatcharakteren zurück , die bestimmte Tests erfüllen, und ist sehr geschickt für Gruppen, von denen man den Untergruppenverband nicht so einfach bilden kann; siehe [11]. Wir wollen hier eine Liste der Permutationscharaktere haben, wovon die Reihenfolge der der Repräsentanten-Untergruppen $H \in \tilde{H}$ entspricht, die , wir mit Hilfe des `Lattice`–Befehls bekommen haben. entspricht. Diese können wir in GAP–3.4 einfach berechnen, wenn wir für jeden Repräsentant H die triviale Klassenfunktion definieren, und diese hochinduzieren nach G. Ein solches Programm steht im Anhang A.

Man bemerkt schnell, daß dieses ein sehr langsames Verfahren ist: Wenn wir alle $Chi's$ auf diese Weise bilden wollen , müssen wir für alle möglichen Paaren (H, T) die Gruppe $< H, T >$ von GAP aufbauen lassen und testen, ob wir so die ganze G erreichen. Danach müssen wir für alle Paare, die durch 3) kommen, auch noch den Schnitt $H \cap T$ bilden. Später werden wir an den Beispielen sehen, daß viele Paaren Test 3) bestehen, so daß wir auch hier viel Zeit verlieren. Deshalb war dieses Verfahren nur nützlich, weil ich mir ziemlich kleine Gruppen angeguckt habe. Das Programm zu diesem Verfahren steht wieder im Anhang A.

1.4 Permutationscharaktere und Markentafeln

Wir haben im letzten Paragraphen gesehen, daß es sehr mühsam ist, für alle Paaren von Untergruppen zu testen, ob so ein Paar vielleicht die ganze Gruppe erzeugt. Manche Ergebnisse, die später folgen, sehen auch ziemlich überflüssig aus: Es passiert oft, daß bei feste $\tilde{H}$ und $\tilde{T}$ für verschiedene Paare (H, T), die zusammen ganz G erzeugen, der Schnitt $H \cap T$ in derselben Klasse, sagen wir, $\tilde{U}$ liegt. Auf diese Art und Weise bekommen wir also immer wieder denselben *Chi*, wobei wir im Grunde genommen momentan nur noch an seiner Existenz interessiert sind. Eine Lösung für dieses Problem findet man in der Theorie der Markentafeln, nach einer Idee von

William Burnside, siehe [3]. Aus Markentafeln kann man schließen, wie die Klassen von konjugierten Untergruppen ineinander geschachtelt liegen. Bevor wir die Markentafeln definieren, brauchen wir erst einen anderen Zugang zu den Permutationscharakteren.

Definition 1.5 *Man sagt, daß die Gruppe G operiert auf die Menge Ω, wenn für alle $\alpha\in\Omega$ und für alle $g\in G$ es ein $\alpha^g\in\Omega$ gibt, so daß gilt:*

1. $\alpha^1 \quad = \quad \alpha$
2. $(\alpha^g)^h \quad = \quad \alpha^{(gh)}$

G operiert transitiv, wenn es nur eine Bahn gibt:

$$G^\alpha := \{\alpha^G : g\in G\} = \Omega, \qquad \forall\alpha\in\Omega.$$

Definition 1.6 *Zu einer Operation der Gruppe G auf eine Menge Ω definiere man den Permutationscharakter $\pi(.)$ als die Anzahl der Elementen von Ω, die fest bleibt unter der Operation von G:*

$$\pi(g) \quad := \quad |\{\alpha\in\Omega \mid \alpha^g = \alpha\}|, \qquad\qquad g \in G.$$

Folgerung 1.7 *π ist ein Charakter.*

Beweis Sei V ein $\mathbb{C}$–Raum, dessen natürliche Basis mit Ω identifiziert wird. Lasse G auf V durch Permutation der Basis operieren. Dann wird V zu einem $\mathbb{C}[G]$–Modul mit Charkter $\pi(g)$. Wenn man für einen $\mathbb{C}[G]$–Modul V eine Zerlegung $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ hat, wobei G die W_i transitiv permutiert, und wenn $H = \{g\in G|W_1 g = W_1\}$ der Stabilisator von W_1 ist, bekommt man durch Induzieren des Charakters η von W_1 nach G genau den Charakter π von V: hochinduziert nach G, genau den von V herbeigeführten Charakter π: $\eta^G = \pi$. (Siehe [8] Definition (5.7) und Theorem (5.8)) $\qquad ||$

Lemma 1.8 *G operiere transitiv auf Ω. Sei H der Stabilisator von α, $\alpha\in\Omega$, dann ist $(1_H)^G$ der Permutationscharakter der Operation.*

Beweis Wähle einen $\mathbb{C}$–Raum V, so daß Ω identifiziert werden kann mit einer Basis von V als $\mathbb{C}[G]$–Modul: $V = \oplus_{\beta\in\Omega} \ \mathbb{C}\beta$. Sei η der von W verursachte Charakter, wo $W \subseteq V$ der mit α übereinstimmende Teilmodul von V ist. Daraus folgt $\eta(h) = |\{\beta\in\Omega : \beta^h = \beta\}| = |\alpha| = 1, \forall h\in H$, und aus der obigen Bemerkung folgt dann, daß $(1_H)^G$ der Permutationscharakter ist. Anderseits, wenn eine Untergruppe H von G gegeben ist, dann ist $(1_H)^G$ der Permutationscharakter der zugehörigen transitiven Operation von G auf $\Omega = \{Hg|g\in G\}$. Man sieht jetzt auch gleich, daß für zwei konjugierte Untergruppen H und T die Permutationscharaktere $(1_H)^G$ und $(1_T)^G$ dieselbe sind. $\qquad ||$

Definition 1.9 *Die Gruppe G operiere auf der Menge Ω. Sei H eine Untergruppe von G. Die Marke $\beta_\Omega(H)$ ist definiert als*

$$\beta_\Omega(H) \quad := \quad |\{\alpha\in\Omega : \alpha^h = \alpha, \forall h\in H\}|$$

Wähle jetzt für Ω immer die Menge der Rechtsnebenklassen $\{G/U\}$ für eine Untergruppe U von G. Wähle einen Repräsentanten U_i aus jeder Klasse von konjugierten Untergruppen $\tilde{U}_i$, wobei die Klassen und ihre Repräsentanten so angeordnet sind, daß $U_i \leq V_j \quad \Rightarrow \quad i \leq j$. Sei weiter $\tilde{U} \preceq \tilde{V}$, falls es eine U in $\tilde{U}$ und ein V in $\tilde{V}$ gibt so daß $U \leq V$. So wird $(\tilde{U}_i, \preceq)$ eine partiell geordnete Menge.

Definition 1.10 *Die Markentafel von G ist definiert als die Matrix $M = (m_{ij})$, mit*

$$m_{ij} \quad := \quad \beta_{\{G/U_i\}}(U_j)$$

Bemerke, daß, wenn wir die Markentafel haben, wir die partielle Ordnung $(\tilde{U}, \preceq)$ der Klassen von konjugierten Untergruppen bestimmen können:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \beta_{\{G/U_i\}}(U_j) & > & 0 & & & \\
\Leftrightarrow & \exists & (U_i g) & \in & G/U_i : \quad (U_i g)u_j & = & (U_i g) & \forall\, u_j & \in & U_j \\
\Leftrightarrow & & & & U_i(gu_j) & = & U_i g & \forall\, u_j & \in & U_j \\
\Leftrightarrow & & & & U_i g u_j g^{-1} & = & U_i & \forall\, u_j & \in & U_j \\
\Leftrightarrow & & & & g u_j g^{-1} & \in & U_i & \forall\, u_j & \in & U_j \\
\Leftrightarrow & & & & u_j & \in & U_i^g & \forall\, u_j & \in & U_j \\
\Leftrightarrow & & & & U_j & \leq & U_i^g & & & \\
\Leftrightarrow & & & & \tilde{U}_j & \preceq & \tilde{U}_i & & &
\end{array}$$

Insbesondere folgt, daß die Markentafel eine Unterdreiecksgestalt hat.

Es folgen nun einige weitere Eigenschaften, die man leicht aus der Definition der Markentafel ableiten kann:

1. $m_{i1} \quad = \quad |\{G/H_i\}| \quad = \quad |G : H_i| \quad \forall i.$
2. Anzahl von Konjugiertenklassen von Untergruppen ist gleich n, dann $m_{nj} = 1 \quad \forall j$.
3. m_{ij} = Anzahl der konjugierten Untergruppen von H_i enthalten in H_j, multipliziert mit dem Index des Normalisators von H_i in G und H_i.
4. $c_{ij} := \frac{m_{ij} m_{j1}}{m_{i1} m_{jj}}$ ist die Zahl der konjugierten Untergruppen von H_j enthalten in H_i.

Lemma 1.11 *Sei $U_i =< g >$ eine zyklische Untergruppe von G, und π_k der Permutationscharakter von U_k. Dann gilt:*

$$m_{ki} \quad = \quad \pi_k(g)$$

Beweis Wenn man Eigenschaft 3 umschreibt, bekommt man

$$m_{ki} \quad = \quad \frac{1}{|U_k|} |\{h \in G : h^{-1} U_i h \quad \in \quad U_k\}|$$

Sei T nun eine Transversale für G/U_k. Dann gilt also

$$\begin{aligned}
m_{ki} &= \frac{1}{|U_k|} |\{h \in G : h^{-1} g h \quad \in \quad U_k\}| \\
&= |\{t \in T : t g t^{-1} \quad \in \quad U_k\}| \\
&= |\{t \in T : U_k t g \quad = \quad U_k t\}| \\
&= \pi_k(g).
\end{aligned}$$

||

Mit diesem Lemma können wir die Werte von π_k auf allen Konjugationsklassen von G bestimmen. Nämlich,

- Wähle aus jeder Konjugationsklasse Cl_i einen Vertreter c_i.
- Bilde die zyklische Gruppe $< c_i >$.
- Es gilt: $< c_i > = U_i \in \tilde{U}_i$ für bestimmte U_i.
- Lies m_{ki} aus der Markentafel heraus.

Beispiel: Die Markentafel und die Permutationscharaktere von $SL(2,3)$. In Zeile i) wird mit | markiert, ob U_i eine zyklische Untergruppe ist. In Zeile ii) stehen die Namen der Konjugationsklassen von $SL(2,3)$.

```
           1:  24                            [ 24,  0,  0,  0,  0,  0,  0]
           2:  12 12                         [ 12,  0,  0,  0,  0, 12,  0]
           3:   8  .  2                      [  8,  2,  2,  0,  0,  0,  0]
           4:   6  6  .  2                   [  6,  0,  0,  0,  2,  6,  0]
           5:   4  4  1  .  1                [  4,  1,  1,  1,  0,  4,  1]
           6:   3  3  .  3  .  3             [  3,  0,  0,  0,  3,  3,  0]
           7:   1  1  1  1  1  1  1          [  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1]

                1  2  3  4  5  6  7
     i)         |  |  |  |  |
    ii)         1a 2a 3a 4a 6a                 1a  3a  3b  6a  4a  2a  6b
                      3b    6b
```

Wenn man den Untergruppenverband einer Gruppe hat, kann man die Markentafel aus der Definition berechnen. Es gibt auch ein Verfahren, um die Markentafel einer Gruppe aus den Markentafeln der maximalen Untergruppen zu bestimmen, eventuell von möglicher weiterer Information ergänzt, aber ohne den Untergruppenverband zu benutzen, siehe [11]. Mehr über Markentafeln gibt es zum Beispiel auch in [9].

1.5 Die Berechnung der Chi's mit der Markentafel

Markentafeln beschreiben, wie die Klassen von konjugierten Untergruppen ineinander geschachtelt liegen: ruppen in einander geschachtelt liegen: Wenn man das Tensorprodukt von zwei Zeilen aus der Markentafel nimmt und dieses wieder zerlegt, ergibt sich, in welchen Klassen die Schnitte von Untergruppen aus den mit den zwei betrachteten Zeilen übereinstimmenden Klassen landen werden. Dieses Ergebnis gibt uns die GAP Funktion `IntersectionsTom`. Also, wenn wir die Markentafel unserer Gruppe haben, können wir alle *Chi*'s von G bestimmen, ohne daß wir mit den Untergruppen zu rechnen brauchen, wie im Verfahren mit dem Untergruppenverband. Wir bekommen aber ein neues Problem: Obwohl wir wissen, wo die Schnitte von zwei Klassen von konjugierten Untergruppen liegen werden, haben wir noch kein Kriterium, das entscheidet, ob es bei einem gegebenen Schnitt von zwei Klassen auch Paare von Untergruppen gibt, die diesen Schnitt haben und außerdem zusammen die ganze Gruppe G erzeugen. Deshalb bekommen wir bei diesem Verfahren viele falsche Klassenfunktionen der Gestalt

$$1_{H\cap T} + 1_G - (1_H)^G - (1_T)^G$$

wobei aber NICHT gilt, daß $< H, T >= G$, so wie in der Definition von Chi vorausgesetzt. Glücklicherweise wissen wir, daß Chi ein Charakter ist. Wenn wir auf diese Bedingung testen, verlieren wir die meisten, aber im allgemeinen nicht alle falschen. Trotzdem können wir dieses Verfahren gut benutzen. Bei kleinen Gruppen als Test für das andere Verfahren: Wenn wir bei dem anderen Verfahren Chi's bekommen, die hier nicht auftreten, ist irgendwo etwas schief gegangen. Bei größeren Gruppen hat das andere Verfahren wegen des großen Aufwandes überhaupt keine Chance. Zusammenfassend sieht dieses Verfahren so aus:

1. Nimm zwei Klassen $\tilde{H}$ und $\tilde{T}$
2. Bestimme die Schnitte $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_t$.
3. Nimm einen Schnitt $\tilde{S}_i$.
4. $(\tilde{S}_i = \tilde{U}) \quad \vee \quad (\tilde{S}_i = \tilde{V}) \quad \Rightarrow$ Gehe zurück nach 3.
5. Bilde $KAND := 1_{S_i}^G + 1_G - (1_H)^G - (1_T)^G$.
6. Als $KAND$ kein Charakter $\Rightarrow$ Gehe zurück nach 3.

Bemerke, daß in 4. die trivialen Fälle weggeworfen werden. Das Programm zu diesem Verfahren steht im Anhang.

Vielleicht ist es gut, darauf hinzuweisen, daß beide Programme zur Bestimmung Chi Charaktere und das Programm zur Bestimmung der monomialen Charaktere bloß Listen der gefragten Charaktere zurückgeben und nichts über die Herkunft der Charaktere aussagen. Wenn wir aber einmal die Listen haben, ist es leicht, die Programme so zu ändern, daß wir die von uns gewünschte Information über die Herkunft (Klasse oder Untergruppenpaar zum Beispiel) fordern können.

1.6 Die Zerlegung in monomiale Charaktere

In den letzten Paragraphen haben wir gesehen, wie man die monomialen Charaktere und die Chi Charaktere einer Gruppe berechnen kann. Jetzt brauchen wir noch eine Methode um zu entscheiden, ob ein Chi eine Summe von Monomialen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}_{>0}$ zu zerlegen ist. Zur Erinnerung: Wenn so etwas für einen Chi auftritt, nennen wir Chi $MON - \mathbb{Q}$. Analog ist $MON - \mathbb{N}$ definiert. Bemerke, daß alle Charaktere die zu betrachten sind, als natürliche Summe von irreduziblen Charakteren von G gegeben sind.

Da $[Chi, 1_G] = 0$, sind bei der Zerlegung in Monomiale von Chi nur die $\mu \in MON(G)$ relevant, wofür auch gilt, daß $[\mu, 1_G] = 0$. Aus den übriggebliebenen Monomialen können wir mit einem kleinen Backtrack-Programm eine minimale Menge von erzeugenden μ's bilden: Fange mit Menge $\{\mu_1\}$ an, füge μ_i hinzu, nur wenn es nicht als Summe von μ_j aus der Menge zu schreiben ist. Mit demselben Backtrack-Programm können wir dann für jeden Chi aus der Liste von Chi Charaktere entscheiden ob Chi $MON - \mathbb{N}$ ist. Wenn wir soweit sind , bleibt noch die Frage: Sind die Chi, die nicht $MON - \mathbb{N}$ sind, vielleicht $MON - \mathbb{Q}$?

Wenn $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ unsere minimale erzeugende Menge ist, so müssen wir für solches Chi bestimmen, ob die Gleichung $Chi = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n$ eine Lösung mit $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ hat. Dieses Problem ist äquivalent mit dem Lösen des Gleichungssystems $M * x = b$, wobei M die Matrix mit den als Vektoren aufgefaßten μ_i als Spalten, x der Lösungsvektor $(a_1, \ldots, a_n)$ ist und b gleich Chi ist, aufgefaßt als Vektor. In MAPLE [2] gibt es ein Paket `linalg`, das die Funktion `linsolve` enthält. Wenn wir dieser Funktion unserem Gleichungssystem geben, bekommen wir eine Parameterdarstellung des Lösungsraums in $\mathbb{Q}$ zurück.

Darauf nehmen wir die Funktionen `minimize` und `maximize`, die in dem MAPLE–Package `simplex` enthalten sind. Mit diesen Funktionen können wir Lösungen bestimmen, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Wenn es jetzt keine maximale Lösung mit allen $a_i \geq 0$ gibt, wissen wir, daß Chi nicht $MON - \mathbb{Q}$ ist. Sonst können wir nach einer minimalen Lösung fragen. Mit ein wenig Basteln können wir mit der `minimize`-Funktion auch die $a_i \in \mathbb{N}$ bestimmen bei den Chi's, die $MON - \mathbb{N}$ sind. Ein Beispiel einer solchen Prozedur und die Backtrack-Prozedur sind in den Anhang aufgenommen.

Jetzt können wir bei einer (kleinen) Gruppe die Chi Charakteren bestimmen und entscheiden, ob eine Chi $MON - \mathbb{Q}$ oder sogar $MON - \mathbb{N}$ ist. Wir können jetzt anfangen zu sehen, was bei den zu betrachtenden Gruppen passiert. Die Gruppen $SL(2,3)$, $GL(2,3)$ und A_5 sind schon von R.W. van der Waall und K. Sato in [14] besprochen worden. Ich habe auf diese Gruppen obige Methoden angewandt und habe dann bei A_5 und $GL(2,3)$ neue Chi's gefunden, die nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind, welche offentsichtlich von beiden Autoren übersehen worden sind.

1.7 Die alten Beispiele

1.7.1 SL(2,3).

Sei $SL(2,3)$ die Gruppe der (2x2)– Matrizen mit Determinante 1 und Einträge in $\mathbb{F}_3$. Die Charaktertafel von $SL(2,3)$ wird gegeben durch:

	2	3	1	1	1	2	3	1
	3	1	1	1	1	.	1	1
		1a	3a	3b	6a	4a	2a	6b
χ_1		1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	A	/A	/A	1	1	A
χ_3		1	/A	A	A	1	1	/A
χ_4		2	-1	-1	1	.	-2	1
χ_5		2	-A	-/A	/A	.	-2	A
χ_6		2	-/A	-A	A	.	-2	/A
χ_7		3	.	.	.	-1	3	.

$$\mathrm{A} = \zeta_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -1 - b3$$

Als erzeugende monomiale Charaktere findet man:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_2 &= [\,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,0\,] \\
\mu_3 &= [\,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,1\,,0\,] \\
\mu_4 &= [\,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,0\,,0\,] \\
\mu_5 &= [\,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,1\,,0\,] \\
\mu_6 &= [\,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,] \\
\mu_7 &= [\,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,]
\end{aligned}$$

Die nächtste Tabelle enthält die insgesamt 7 Chi's. Rechts steht immer die Zerlegung in erzeugende Monomiale, gegeben durch den Koeffizientenvektor,das heißt, wenn $Chi = c_1 * \mu_1 + \ldots +$

$c_7 * \mu_7$, dann findet man in der Zerlegungsspalte den Vektor $[c_1, \ldots, c_7]$.

n^o	Chi	Zerlegung in $\{\mu_i\}$
Chi_1	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_2	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2]	[2 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_3	[0 , 0 , 0 , 2 , 1 , 1 , 1]	[1 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0]
Chi_4	[0 , 0 , 0 , 2 , 1 , 1 , 2]	[2 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0]
Chi_5	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1]	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1]
Chi_6	[0 , 1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 1]	[1, v - 2 , v , v , - 2 v + 2 , 1 , 1]
Chi_7	[0 , 1 , 1 , 2 , 1 , 1 , 1]	[1 , 0 , 1 , 1 , 0 , 1 , 1]

Wenn ein Chi Character nicht zu zerlegen ist, bekommen wir eine Parameterdarstellung des Lösungsraums zurück, da das Programm keine Lösung finden kann, die die Voraussetzungen erfüllt. Aus dieser Parameterdarstellung hier kann man mit leichter Hand schließen, daß es in der Tat keine gewünschte Lösung gibt bei Chi_6: Bemerke, daß wir vorausgesetzt haben, daß alle $c_i \geq 0$ sind. Nehmen wir an, es gibt trotzdem eine Lösung, dann $c_2 = v - 2$, das heißt $v \geq 2$. Andererseits $c_5 = -2v + 2$, das heißt $v \leq 1$, Widerspruch.

Es stellt sich heraus, daß Chi_6 genau dann Untergruppen H und T entspricht, wenn H und T zwei verschiedene Untergruppen von Ordnung drei sind.

Als Beispiel sind im Anhang alle Herkünfte der Chi Charaktere aufgelistet.

1.7.2 GL(2,3)

$GL(2,3)$ ist die Gruppe der nicht-singulären (2x2)-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_3$. Hier gibt es eine Liste von ingesamt 46 verschiedenen Chi Charakteren, von denen 44 $MON - \mathbb{N}$ sind, und zwei nicht $MON - \mathbb{Q}$.

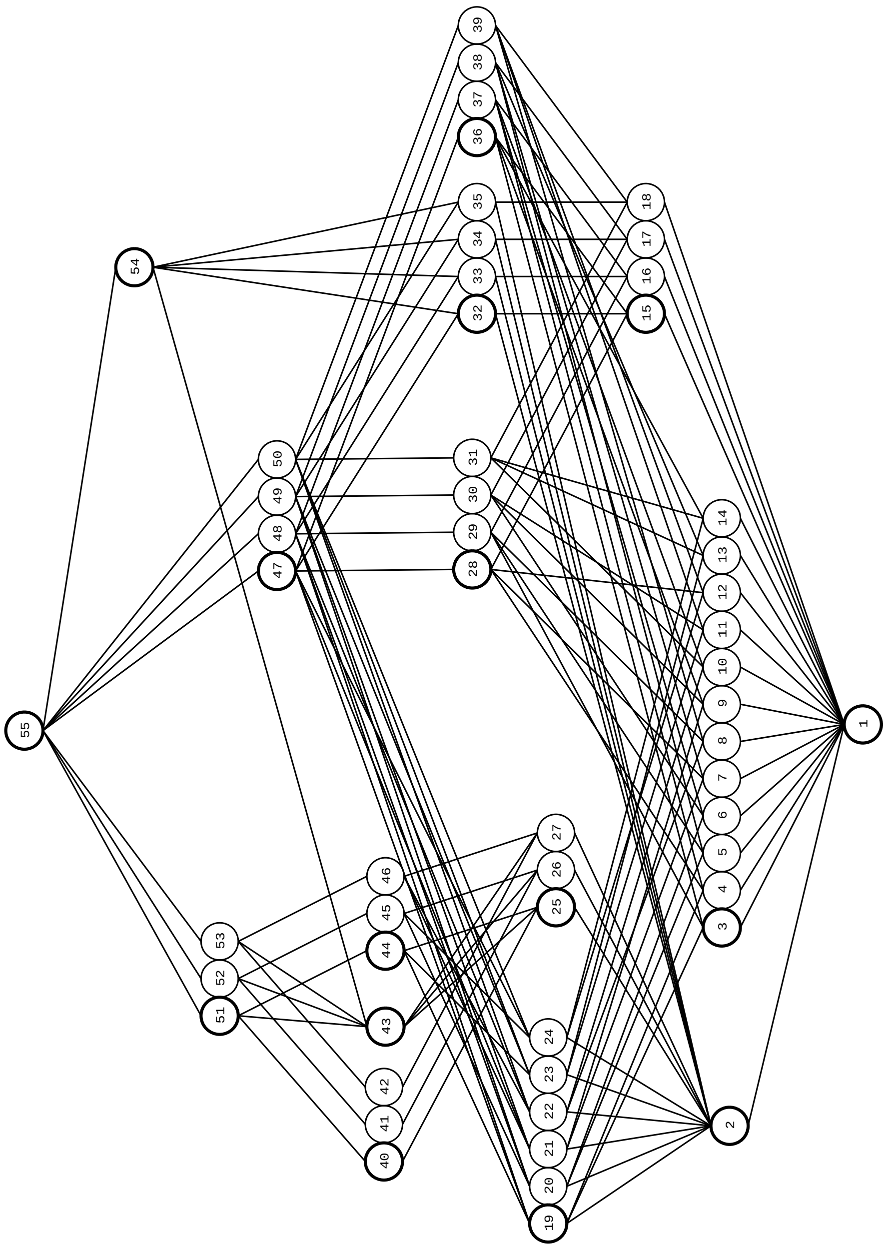
Die Charaktertafel von $GL(2,3)$ wird gegeben durch:

	2	4	2	1	3	1	3	3	4
	3	1	0	1	0	1	0	0	1
		1a	2a	3a	8a	6a	8b	4a	2b
χ_1		1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	-1	1	-1	1	-1	1	1
χ_3		2	.	-1	.	-1	.	2	2
χ_4		2	.	-1	A	1	-A	.	-2
χ_5		2	.	-1	-A	1	A	.	-2
χ_6		3	-1	.	1	.	1	-1	3
χ_7		3	1	.	-1	.	-1	-1	3
χ_8		4	.	1	.	-1	.	.	-4

$$\mathrm{A} = \zeta_8 + {\zeta_8}^3 = \sqrt{-2} = i2$$

Die zwei nicht zu zerlegenden Chi Charaktere sind:

$$Chi_{16} := [\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$$
$$Chi_{25} := [\ 0\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 1\ ]$$



Der Untergruppenverband der Gruppe $GL(2,3)$.
Die Untergruppen innerhalb einer Klasse konjugierter Untergruppen sind verbunden.

Man kann Chi_{16} auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen bauen: Erstens aus einer nicht-zentralen Untergruppe der Ordnung 2 und aus einer Untergruppe der Ordnung 3, zum Beispiel:

$$H_1 =< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} > \qquad\qquad T_1 =< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} >$$

Zweitens aus zwei beliebigen nicht konjugierten Untergruppen isomorph zu S_3, der symmetrischen Gruppe auf drei Punkten. Chi_{25} läßt sich herstellen, indem man eine zur S_3 isomorphe Untergruppe H nimmt, zusammen mit einer Untergruppe T der Ordnung 3, so daß $T \nleq H$. Bei der erzeugenden Menge der monomialen Charaktere

$$\begin{array}{lcl}
\mu_1 & = & [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_2 & = & [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,] \\
\mu_3 & = & [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,] \\
\mu_4 & = & [\,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_5 & = & [\,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_6 & = & [\,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_7 & = & [\,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,] \\
\mu_8 & = & [\,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,]
\end{array}$$

bekommt man als Parameterdarstellung für die Zerlegung von Chi_{16} in erzeugende Monomiale

[v - 2 , 0 , 1 , - v + 1 , - v + 1 , v , 1 , 0]

und die Eingaben für c_1 und c_4 in $Chi_{25} = \sum_i c_i\mu_i$ führen zu einem Widerspruch zu der Nicht-Negativität der c_i. Für die Zerlegung von Chi_{25} findet man

[w - 3 , 1 , 2 , - w + 2 , - w + 2 , w , 2 , 0]

und auch hier führen die Eingaben für c_1 und c_4 zu einem Widerspruch.

Es sei bemerkt, daß in [14] in 'example 9' nur von einem Chi die Rede war, und daß Chi_{25} nicht erwähnt worden ist.

1.7.3 A5

Sei A_5 die alternierende Gruppe auf fünf Punkten. Die Charaktertafel von A_5 ist:

2	2	2	.	.	.
3	1	.	1	.	.
5	1	.	.	1	1
	1a	2a	3a	5a	5b
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	.	A	*A
χ_3	3	-1	.	*A	A
χ_4	4	.	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	.	.

$$\mathrm{A} = -{\zeta_5}^2 - {\zeta_5}^3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + b5$$

Wenn eine Untergruppe von Ordnung 5 und eine Untergruppe der Ordnung 2 die ganze A_5 erzeugen, was z.B. passiert mit $H_1 =< (1,2,3,4,5) >$ und $T_1 =< (2,3)(4,5) >$ oder wenn man zwei beliebige, aber natürlich unterschiedliche, Untergruppen der Ordnung 10 nimmt als H_2 und T_2, bekommt man einen unzerlegbaren Charakter

$$Chi_8 := [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 1\ ]$$

Bei der Menge von erzeugenden monomialen Charakteren von A_5

$$\begin{array}{lcl} \mu_1 & = & [\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ] \\ \mu_2 & = & [\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ] \\ \mu_3 & = & [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ] \\ \mu_4 & = & [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ] \\ \mu_5 & = & [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ] \end{array}$$

findet man die Parameterdarstellung des Lösungsraums für die Zerlegung von Chi_8 in Monomiale

[- 1 - 2u , u + 1 , u + 1 , u , - 2u]

Wenn Chi_8 zerlegbar wäre, so würde es ergeben aus den Eingaben für c_4 und c_5 in $Chi_8 = \sum_i c_i\mu_i$, daß $u = 0$, das heißt $c_1 = -1$. Widerspruch.
Ebenso nicht in Monomiale zerlegbar ist der Charakter

$$Chi_{10} := [\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 3\ ],$$

der von zwei beliebigen verschiedenen Untergruppen der Ordnung 5 erzeugt wird, und wozu die Parameterdarstellung

[- 2v + 3 , v , v , v - 3 , - 2v + 4]

gehört. Auch hier läßt sich aus den Eingaben für c_1 und c_4 schnell ein Widerspruch schließen.

Den letzten Chi Charakter, der nicht $MON-\mathbb{Q}$ ist, erhält man, wenn man eine Untergruppe H_1 von Ordnung 10 zusammen mit einer Untergruppe T_1 von der Ordnung 5 nimmt, so daß $T_1 \not\leq H_1$ ist:

$$Chi_{21} := [\ 0\ ,\ 2\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 3\ ] = (\text{-}2w{+}3)\mu_1 + w\mu_2 + w\mu_3 + (w\text{-}2)\mu_4 + (\text{-}2w{+}4)\mu_5,$$

und es gibt keine w $\in\mathbb{Q}$, so daß die c_i in $\mathbb{Q} \geq 0$ liegen. Neben diesen drei unzerlegbaren Chi Charakteren gibt es noch 21 Chi's, die alle $MON-\mathbb{N}$ sind.

In [14] wird in 'example 8' und in der Schlußfolgerung am Ende von 'example 9' nur über Chi_{10} gesprochen, wo es aber faktisch drei Chi's gibt, die nicht $MON-\mathbb{Q}$ sind.

Wir haben gesehen, daß man in diesen drei Beispielen keine Lösung für das Brauersche Problem der Zerlegung aller Chi Charaktere dieser Gruppen erlangen kann. Es sind aber nur sehr wenige Chi's, wo es schief geht. Auch gibt es noch kein Beispiel von einem Chi, das $MON-\mathbb{Q}$ ist, aber nicht $MON-\mathbb{N}$. Deshalb werde ich in den nächsten Abschnitten betrachten, was bei der Gruppe 48.50 geschieht, einer auflösbaren Gruppe von der Ordnung 48, deren sämtliche irreduzible Charaktere nicht alle monomial sind, weil diese der Gruppe $GL(2,3)$ ähnlich ist, und was bei den einfachen Gruppen $GL(3,2)$ und A_6 passiert.

1.8 Die Gruppe 48.50

Oben haben wir die Gruppe $GL(2,3)$ betrachtet. Diese Gruppe wurde damals als Gruppe der nicht-singulären (2x2)-Matrizen mit Einträge aus $\mathbb{F}_3$ definiert. Man kann diese Gruppe auch beschreiben als ein semi-direktes Produkt $S_3 \ltimes Q$, wobei Q die Quaternoinengruppe von der Ordnung 8 ist, die wegen der Definition von Semidirektheit normal in $GL(2,3)$ ist. Man sagt auch, daß $GL(2,3)$ eine zerfallene Erweiterung von Q mit S_3 ist. Es gibt auch eine nicht-zerfallende Erweiterung von Q der Ordnung 48; diese wird in GAP zum Beispiel als `SolvableGroup( 48,50 )` konstruiert. Ich werde diese Gruppe weiterhin bezeichnen mit K. Eine Darstellung von K wird gegeben durch $< M_1, M_2, M_3 >$, wo $SL(2,3) =< M_1, M_2 >$ und $M_3^4 = Id_2$ mit $Det(M_3) = -1$. Genauer, $K =< M_1, M_2, M_3 >$ mit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} >,$$

wo $a^2 = -1$.

Die Charaktertafel von K wird gegeben durch

	2	4	1	1	3	2	3	3	4
	3	1	1	1	.	.	.	.	1
		1a	3a	6a	4a	4b	8a	8b	2a
χ_1		1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_3		2	-1	-1	2	.	.	.	2
χ_4		2	-1	1	.	.	A	-A	-2
χ_5		2	-1	1	.	.	-A	A	-2
χ_6		3	.	.	-1	1	-1	-1	3
χ_7		3	.	.	-1	-1	1	1	3
χ_8		4	1	-1	.	.	.	.	-4

$$\text{A} = -\zeta_8 + {\zeta_8}^3 = -\sqrt{2} = -r2$$

Mit unserem Programm für das Berechnen der monomialen Charaktere einer Gruppe erhält man, daß alle irreduziblen Charaktere von K monomial sind mit Ausnahme von χ_4 und χ_5. In K existieren ingesamt 27 verschiedene Chi's, und es ergibt sich, daß jeder $MON - \mathbb{N}$ ist, im Gegensatz zur Lage in $GL(2,3)$, wo wir gesehen haben, daß es zwei Chi's gibt, die sogar nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind. Eine ‘ Erklärung ’ könnte man suchen im folgenden: Wenn man die Untergruppenverbände von $GL(2,3)$ und K betrachtet, sieht man erstens, daß der Verband von K im Verband von $GL(2,3)$ ‘enthalten’ ist, und zweitens, daß die zwei Chi's aus $GL(2,3)$ die nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind, nur konstruierbar sind mit Hilfe des Teils des Verbands von $GL(2,3)$, das nicht in K auftritt. Nämlich, wenn man Chi_{16} und Chi_{25} machen will, braucht man unbedingt eine zur S_3 isomorphe Untergruppe oder eine nicht–zentrale Untergruppe Ordnung zwei, und diese Gruppen gibt es nicht in K.

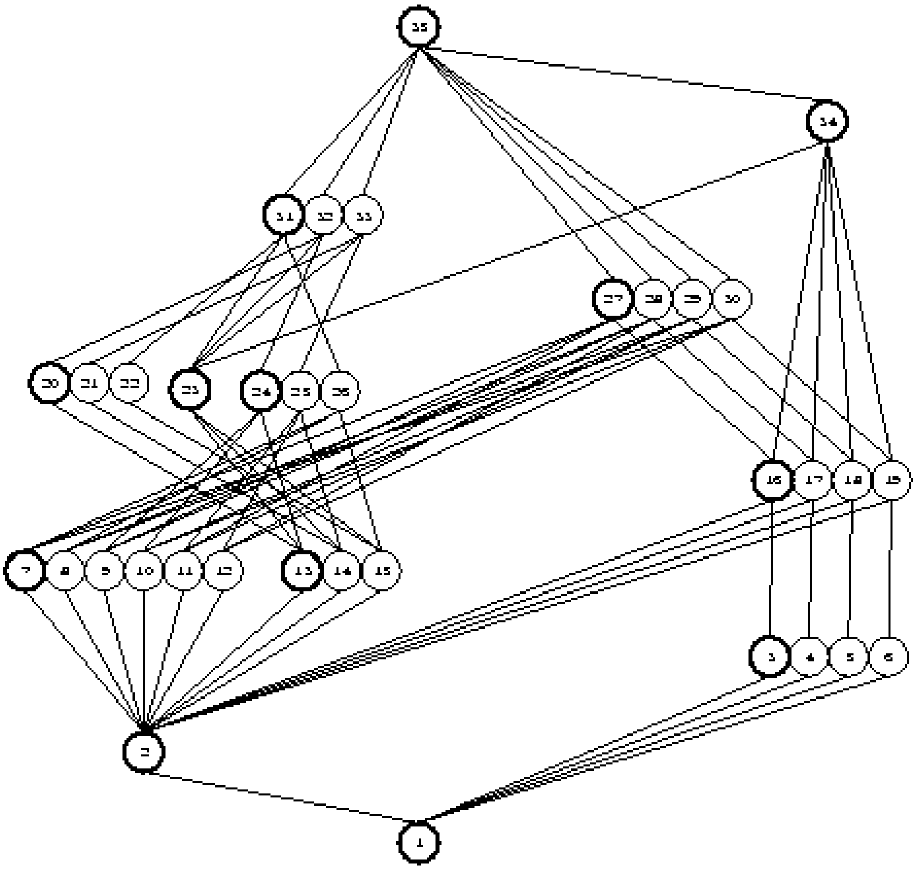


Abbildung 1.1: Der Untergruppenverband der Gruppe 48.50.

1.9 GL(3,2)

Mit $GL(3,2)$ wird im allgemeinen die Gruppe der nicht-singulären (3x3)–Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ bezeichnet. Diese Gruppe ist bis auf Isomorphie die einzige einfache Gruppe der Ordnung 168. Die Charaktertafel von $GL(3,2)$ wird gegeben durch

	2	3	3	.	2	.	.
	3	1	.	1	.	.	.
	7	1	.	.	.	1	1
		1a	2a	3a	4a	7a	7b
χ_1		1	1	1	1	1	1
χ_2		3	-1	.	1	A	/A
χ_3		3	-1	.	1	/A	A
χ_4		6	2	.	.	-1	-1
χ_5		7	-1	1	-1	.	.
χ_6		8	.	-1	.	1	1

$$\mathrm{A} = \zeta_7 + {\zeta_7}^5 + {\zeta_7}^6 = \tfrac{-1-\sqrt{-7}}{2} = -1 - b7$$

Hier existieren 57 verschiedene Chi's und ich habe gezeigt daß von denen 6 Chi's nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind. Alle sonstige Chi's sind $MON - \mathbb{N}$. Man kann als erzeugende Menge monomialer Charaktere nehmen:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_2 &= [\,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,] \\
\mu_3 &= [\,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,1\,] \\
\mu_4 &= [\,0\,,0\,,1\,,1\,,1\,,1\,] \\
\mu_5 &= [\,0\,,1\,,0\,,1\,,1\,,1\,] \\
\mu_1 &= [\,0\,,1\,,1\,,0\,,1\,,1\,]
\end{aligned}$$

In der nächsten Tafel stehen die 'Verbrecher' mit ihrer Parameterdarstellung, und in der letzten Spalte stehen immer zutreffende Koeffizienten, aus denen man wie oben schnell schließen kann, daß diese Charaktere tatsächlich nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind.

n^o	Chi	Parameterdarstellung	Koeffizienten
Chi_{15}	[0 ,1 ,1 ,2 ,1 ,2]	[-v ,v-1 ,2v ,-v+1 ,-v+1 ,v]	c_1, c_6, c_2
Chi_{25}	[0, 2, 2, 2, 3, 2]	[-v ,v-1 ,2v-2 ,-v+2 ,-v+2 ,v]	c_1, c_6, c_2
Chi_{35}	[0, 2, 2, 4, 3, 4]	[-v-1 ,v ,2v+2 ,-v+1 ,-v+1,v+1]	c_2, c_1
Chi_{45}	[0, 3, 3, 3, 5, 4]	[-v ,v ,2v-1 ,-v+2 ,-v+2 ,v+1]	c_1, c_2, c_3
Chi_{56}	[0, 3, 3, 6, 5, 4]	[-v-2 ,-1+v ,2v ,-v+3 ,-v+3 ,v]	c_6, c_1
Chi_{57}	[0, 3, 3, 6, 5, 6]	[v ,-v-1 ,-2v ,v+3 ,v+3 ,-v]	c_1, c_6, c_2

1.10 A6

In diesem Abschnitt werde ich das Verhalten der Chi–Charaktere der Gruppe A_6 behandeln, die alternierenden Gruppe auf sechs Punkten. A_6 ist eine einfache Gruppe der Ordnung 360. Betrachte erstens die Charaktertafel von A_6

		1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b
	2	3	3	.	.	2	.	.
	3	2	.	2	2	.	.	.
	5	1	.	.	.	.	1	1
χ_1		1	1	1	1	1	1	1
χ_2		5	1	-1	2	-1	.	.
χ_3		5	1	2	-1	-1	.	.
χ_4		8	.	-1	-1	.	A	*A
χ_5		8	.	-1	-1	.	*A	A
χ_6		9	1	.	.	1	-1	-1
χ_7		10	-2	1	1	.	.	.

$$\mathrm{A} = -\zeta_5 - {\zeta_5}^4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -b5$$

In A_6 existieren ingesamt 196 verschiedene Chi–Charaktere, von denen 164 $MON - I\!N$ sind, und es gibt 31 Charaktere die nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind.

In A_6 gibt es aber eine Klasse von konjugierten Untergruppen von Ordnung 36 von Gruppen von Typ $3^2 : 4$, was heißt: Eine zyklische Gruppe von Ordnung 4, die semidirekt operiert auf ein direktem Produkt von zwei zyklischen Gruppen von Ordnung 3. Ein Beispiel einer solchen Gruppe ist

$$R \quad = \quad <(4,5,6),(1,2,3),(2,3)(5,6),(1,4,2,5)(3,6)>$$

Aus der Markentafel läßt sich schließen, daß für jede nicht-triviale Wahl von zwei Untergruppen H und T aus dieser Klasse der Schnitt $H \cap T$ eine zyklische Untergruppe von Ordnung 4 bestimmt, während die zwei Gruppen zusammen die ganze A_6 erzeugen. Bemerke dazu, daß H und T maximal in A_6 sind. Diese Konfiguration gibt Anlaß zu einem Chi–Charakter der Gestalt

$$Chi_{165} \quad = \quad \chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 + 2\chi_5 + \chi_6 + 2\chi_7$$

Als erzeugende monomiale Charaktere können wir nehmen

$\mu_1 =$ [0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,1]
$\mu_2 =$ [0, 0 ,0 ,1 ,1 ,0 ,2]
$\mu_3 =$ [0 ,0 ,0 ,1 ,1 ,1 ,2]
$\mu_4 =$ [0 ,0 ,1 ,0 ,0 ,0 ,1]
$\mu_5 =$ [0 ,0 ,1 ,1 ,1 ,1 ,0]
$\mu_6 =$ [0 ,1 ,0 ,0 ,0 ,0 ,1]
$\mu_7 =$ [0 ,1 ,0 ,1 ,1 ,1 ,0]
$\mu_8 =$ [0 ,1 ,1 ,0 ,0 ,0 ,0]
$\mu_9 =$ [0 ,1 ,1 ,1 ,2 ,2 ,2]
$\mu_{10} =$ [0 ,1 ,1 ,2 ,1 ,2 ,2]

und erhalten dann als Parameterdarstellung für die Zerlegung von Chi_{165} in diesen Monomialen

[-10w-3v-2t-2u+11 ,w ,v ,t+2u+v+4w-5 ,-v-u-4w+5 ,t ,u ,-t-u-2w+3 ,w-1 ,w-1]

Behauptung 1.12 *Chi_{165} ist $MON - \mathbb{Q}$, aber nicht $MON - I\!N$.*

Beweis Man kann gleich überprüfen, daß

$$2 * Chi_{165} \quad = \quad 2\mu_2 + \mu_5 + \mu_7 + \mu_8$$

und damit ist Chi_{165} $MON - \mathbb{Q}$. Nehmen wir an Chi_{165} sei auch $MON - \mathbb{N}$. Betrachte jetzt die Parameterdarstellung. Es folgt daß t, u, v und w alle nicht–negativ sind und aus die Eingaben für z.B. c_{10} ergibt sich $w \geq 1$. Dieses liefert, angewendet auf die Eingaben für c_8 und c_5, die zwei Bedingungen $t + u \leq 1$ und $u + v \leq 1$. Jetzt sind die Möglichkeiten eingeschränkt auf fünf Fälle, die alle schnell zu einem Widerspruch führen:
a) $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$. Dann ergibt c_4, daß $w \geq \frac{5}{4}$, während c_5 zu $w \leq \frac{5}{4}$ führt.
b) $t = 0$, $u = 0$, $v = 1$. Aus c_8 erhält man $w \leq \frac{3}{2}$, aber dann ist $w = 1$, und damit c_1 negativ.
c) $t = 0$, $u = 1$, $v = 0$. Aus c_5 folgt entsprechend, daß $w = 1$, und wieder wird c_1 negativ.
d) $t = 1$, $u = 0$, $v = 0$. c_8 führt zu $w = 1$, und dann ist $c_1 = -1$.
e) $t = 1$, $u = 0$. $v = 1$. Aus c_5 und den Voraussetzungen erhält man $w = 1$, aber dann ist $c_1 = -4$. $\|$

1.11 Schlußfolgerung

In den letzten Abschnitten haben wir gesehen, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, eine Lösung für das Brauersche Problem nur mit Hilfe der hier verfügbaren Theorie zu finden. Dieses Phänomen war schon bekannt. Wir haben auch in unseren Beispielen gesehen, daß die Zahl der 'Verbrecher', das heißt *Chi*–Charaktere, die nicht $MON - \mathbb{Q}$ sind, im allgemeinen nicht alzu groß ist. Auch haben wir gefunden, daß ein *Chi*-charakter der $MON - \mathbb{Q}$ ist, nicht unbedingt $MON - \mathbb{N}$ zu sein braucht. Und wir haben gesehen, daß es Gruppen gleicher Ordnung gibt, deren Untergruppenverbände 'ineinander geschachtelt sind '.

2. Monomialität und Primitivität irreduzibler Charaktere in einfachen Gruppen.

2.1 MP

In diesem Kapitel werde ich die Herkunft irreduzibler Charaktere einfacher Gruppen untersuchen. Wir haben im ersten Kapitel schon gesehen, daß ein Charakter χ monomial genannt wird, wenn ein linearer Charakter in einer Untergruppe existiert, der hochinduziert gleich χ ist. Eine Gruppe wird eine M-Gruppe genannt wenn alle irreduzible Charaktere der Gruppe monomial sind. Es war K. Taketa, der bewies, daß jede M-Gruppe auflösbar ist, und da eine nicht-abelsche einfache Gruppe nie auflösbar ist, brauchen wir mehr zur Betrachtung der Herkunft irreduzibler Charaktere.

Definition 2.1 *Sei χ ein Charakter der Gruppe G. Wir nennen χ primitiv, wenn es keine echte Untergruppe U von G und $\vartheta \in Char(U)$ gibt mit $\vartheta^G = \chi$. Eine Gruppe T ist eine PC-Gruppe, wenn die irreduziblen Charaktere von T alle primitiv sind.*

Man hat in [5] bewiesen, daß es mindestens eine Folge einfacher Gruppen gibt, die alle PC–Gruppen sind: Wenn $n \neq 2m^2$, für $m \in \mathbb{Z}$, dann ist die alternierende Gruppe A_{2n+1} eine PC-Gruppe. Diese Eigenschaft gehört aber bestimmt nicht jeder einfacher Gruppe: Sei λ einer der nicht-trivialen linearen Charaktere von A_4. A_4 ist eine maximale Untergruppe von A_5, und wenn man λ hochinduziert nach A_5, so ergibt sich der irreduzible Charakter von Grad 5 von A_5, und wir haben eine einfache Gruppe außerhalb PC gefunden.

Wenn man sich einige relativ kleine einfache Gruppen ansieht scheint es sinnvoll, die nächste Definition einzuführen:

Definition 2.2 *Wir sagen, daß eine Gruppe in MP liegt, wenn jeder nicht–linearer irreduzibler Charakter der Gruppe entweder monomial oder primitiv ist.*

Bemerke, daß PC-Gruppen immer MP sind.

Mit Hilfe von GAP habe ich eine Zahl einfacher Gruppen kontrolliert auf die PC- und MP-Eigenschaft. Es stellt sich heraus, daß die PC-Eigenschaft im allgemeinen nicht für einfache alternierende Gruppen A_m gilt, mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ein Gegenbeispiel ist die Gruppe A_6. Auch habe ich erhalten, daß es einfache Gruppen gibt, die nicht MP sind, zum Beispiel $SL(3,3)$ und A_8.

Die Charaktertafeln und die Ordnung und Typ der maximalen Untergruppen der zu betrachtenden einfachen Gruppen findet man aufgelistet im ATLAS [4]. Zum Kontrollieren der MP-Eigenschaft für die Gruppe G kann man jetzt folgendes tun:

1. Aus der Charaktertafel lassen sich die Grade der irreduziblen Charaktere ermitteln.
2. Bestimme mit GAP alle Klassen von konjugierten Untergruppen von G, wofür der Index eines Vertreters kleiner oder gleich der maximale Grad der irreduziblen Charaktere ist.
3. Wenn ein Charakter aus $Irr(G)$ unerreichbar ist des Grades wegen, ist es jedenfalls primitiv.
4. Induziere die linearen Charaktere der Vertreter, vor denen der Index gleich einem Grad eines irreduziblen Charakters ist. Dieses bestimmt die Monomialen der irreduziblen Charaktere.
5. Induziere die Vertretercharaktere, vor denen das Produkt des Index mit dem Grad gleich einem Grad eines irreduziblen Charakters ist. Diese entscheidet schließlich über die Primitivität der nach 4) übriggebliebene irreduziblen Charaktere.

Mit Hilfe der `Group Characters`, die in GAP-3.4 definiert sind, kann man leicht Charaktere identifizieren, addieren und hochinduzieren. In den nächsten Abschnitten sind die Charaktertafeln immer so wie im Atlas [4] geordnet. In den nicht-trivialen Fällen werde ich eine Liste mit der Herkunft der monomialen Charaktere geben, in der mit "P" die Primitivität eines Charakters angedeutet wird; Ist ein Charakter nicht primitiv, werden die Typen der Herkunft–Untergruppe gegeben. Es sei bemerkt, daß der triviale Charakter einer Gruppe sowohl monomial als primitiv ist.

2.2 Einfache Gruppen in MP

A5

Die alternierende Gruppe auf fünf Punkten. Ordnung: 60.

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\chi_i(1)$	3	3	4	5
Herkunft	P	P	P	A_4

GL(3,2)

Die Gruppe der (3 x 3)–Matrizen mit Einträge in $\mathbb{F}_2$. Ordnung: 168

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$\chi_i(1)$	3	3	6	7	8
Herkunft	P	P	P	S_3	$7:3$

A6

Die alternierende Gruppe auf sechs Punkten. Ordnung: 360.

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7
$\chi_i(1)$	5	5	8	8	9	10
Herkunft	P	P	P	P	P	$3^2 : 4$

Bemerke insbesondere, daß sich erweist, daß A_6 keine PC-Gruppe ist, da χ_7 monomial ist.

SL(2,8)

Die Gruppe der (2x2)–Matrizen mit Determinant gleich eins, mit Eingaben in $\mathbb{F}_8$. Ordnung: 504.

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
$\chi_i(1)$	7	7	7	7	8	9	9	9
Herkunft	P	P	P	P	P	$2^3 : 7$	$2^3 : 7$	$2^3 : 7$

PSL(2,11)

Die Gruppe der normierten projektiven Abbildungen des projektiven Raums $\mathbb{P}(1, \mathbb{F}_{11})$ von Dimension 1 über $\mathbb{F}_{11}$. Ordnung: 660. Bemerke, daß es in GAP keinen Befehl gibt fürs Definieren einer PSL–Gruppe. Hier können wir aber leicht eine Darstellung für $PSL(2,11)$ gewinnen, da alle maximalen Untergruppen von Index 12 in der Mathieu-Gruppe M_{11} von Typ $PSL(2,11)$ sind, und M_{11} sich in GAP einführen läßt mit Hilfe der Präsentation

$$M_{11} \quad \cong \quad < (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11), (5,6,4,10), (11,8,3,7) >$$

GAP ist außerdem imstande, den Untergruppenverband von M_{11} zu berechnen, und daraus kann man schließlich eine Darstellung für $PSL(2,11)$ destillieren.

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8
$\chi_i(1)$	5	5	10	10	11	12	12
Herkunft	P	P	P	P	P	$11 : 5$	$11 : 5$

A7

Ordnung: 2 520. A_7 ist eine PC-Gruppe, sehe Abschnitt 2.1.

M11

Die sporadische Mathieusche Gruppe M_{11}. Ordnung: 7 920. Darstellung: sehe $PSL(2,11)$.

Irreduziblen	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9	χ_{10}
$\chi_i(1)$	10	10	10	11	16	16	44	45	55
Herkunft	P	P	P	$A_6.2$	P	P	P	P	$3^2 : Q_8.2$

In dem Appendix hinten im Isaacs Buch [8] sind die Charaktertafeln einer Anzahl von einfachen Gruppen gegeben. Diese Gruppen sind genau die Gruppen, die ich bis jetzt in diesem Kapitel betrachtet habe, außer der Gruppe A_7. Das Ermitteln oder Widerlegen der MP–Eigenschaft für die Gruppen dieser Liste war dann auch meine ursprüngliche Aufgabe.

PSL(2,13), PSL(2,17), PSL(2,19), PSL(2,16), U(3,3), PSL(2,23), PSL(2,25), PSL(2,27), PSL(2,29) und PSL(2,31).

Es stellt sich heraus, daß alle andere einfache Gruppen der Ordnung kleiner als 20 000 auch in MP liegen, außer der Gruppe $SL(3,3)$. Dieses kann man gleich aus den Graden der irreduziblen Charaktere und den Indizes der maximalen Untergruppen schließen.

Gruppe	PSL(2,11)	PSL(2,13)	PSL(2,17)	PSL(2,19)	PSL(2,16)
Ordnung	660	1 092	2 448	3 420	4 080
Max($\chi_i(1)$	12	14	18	20	17
Min(Index)	11	14	18	18	17

Gruppe	U(3,3)	PSL(2,23)	PSL(2,25)	PSL(2,27)	PSL(2,29)
Ordnung	6 048	6 072	7 800	9 828	12 180
Max($\chi_i(1)$	32	24	26	28	30
Min(Index)	28	22	26	12 *	30

* Andere $\chi_i(1)$: 1, 13, 26, 27.

2.3 Zwei einfache Gruppen außerhalb MP: SL(3,3) und A8

SL(3,3)

Mit $SL(3,3)$ wird die Gruppe der (3x3)–Matrizen von Determinante gleich 1 mit Eingaben in $\mathbb{F}_3$ bezeichnet. Diese Gruppe ist eine einfache Gruppe der Ordnung 5 616. Das Maximum der Grade der irreduziblen Charaktere beträgt 39, und wir betrachten deshalb den Teil des Untergruppenverbandes mit Untergruppen, deren Index kleiner als 40 ist:

Klasse	Ordnung Vertreter	Länge Klasse	Index in SL(3,3)	maximal in Klasse
45	144	39	39	49
46	144	39	39	50
47	216	13	26	49
48	216	13	26	50
49	432	13	13	51
50	432	13	13	51
51	5616	1	1	

In untenstehender Tabelle gebe ich für jeden irreduziblen Charakter von $SL(3,3)$ alle Herkünfte.

Irreduziblen	$\chi_i(1)$	Primitiv	Monomiale Herkunft	Nicht–Monomiale Herkunft
χ_1	1	•	51	
χ_2	12	•		
χ_3	13		49, 50	
χ_4	16	•		
χ_5	16	•		
χ_6	16	•		
χ_7	16	•		
χ_8	26		47, 48	49, 50
χ_9	26			49, 50
χ_{10}	26			49, 50
χ_{11}	27	•		
χ_{12}	39		46, 45	

Wir sehen, daß man χ_9 und χ_{10} bilden kann, wenn man einen bestimmten Charakter aus einem Vertreter H_{49} oder H_{50} aus Klasse 49 beziehungsweise Klasse 50 hochinduziert nach $SL(3,3)$. H_{49} und H_{50} sind isomorphe Untergruppen von $SL(3,3)$ von Typ $3^2 : 2.S_4$. Wenn man aus ihren irreduziblen Charakteren einen nicht-rationalen Charakter von Grad 2 hochinduziert, ergibt sich in der Tat χ_9 oder χ_{10}. Da in dieser Tabelle alle Möglichkeiten aufgelistet sind, ergibt sich, daß χ_9 und χ_{10} weder primitiv noch monomial sind. Damit ist bewiesen, daß $SL(3,3)$ nicht in MP liegt.

A8

Ähnliches passiert in A_8, der alternierende Gruppe auf acht Punkten, deren Ordnung sich auf 20 160 beläuft. Hier tritt 70 als maximaler Grad der irreduziblen Charaktere auf, und wir können uns beschränken auf untenstehende Liste von Klassen von konjugierten Untergruppen:

Klasse	Ordnung Vertreter	Länge Klasse	Index in A_8	maximal in Klasse
127	288	35	70	132
128	288	35	70	132
129	288	35	70	132
130	360	28	56	133,136
131	360	56	56	137
132	576	35	35	137
133	720	28	28	137
134	1344	15	15	137
135	1344	15	15	137
136	2520	8	8	137
137	20160	1	1	

Auch hier erhalten wir, daß es zwei konjugierte irreduzible Charaktere, χ_{10} und χ_{11}, in $Irr(A_8)$ gibt, die weder primitiv noch monomial sind. Wie bei $SL(3,3)$ stammen die Herkunftcharaktere, die auch irreduzibel sind, nicht-rational und von Grad 3, aus zwei Klassen von isomorphen maximalen Untergruppen, deren Typ hier $2^3 : L(3,2)$ ist.

Irreduziblen	$\chi_i(1)$	Primitiv	Monomiale Herkunft	Nicht–Monomiale Herkunft
χ_1	1	•	137	
χ_2	7	•		
χ_3	14	•		
χ_4	20	•		
χ_5	21	•		
χ_6	21	•		
χ_7	21	•		
χ_8	28	•		
χ_9	35		132	
χ_{10}	45			134,135
χ_{11}	45			134,135
χ_{12}	56	•		
χ_{13}	64	•		
χ_{14}	70		127,129	132

2.4 Schlußfolgerung

Für die ersten neunzehn einfachen Gruppen aus dem Atlas [4] ist jetzt ermittelt, ob sie der Klasse MP zugehören. Dabei haben wir gesehen, daß die MP–Eigenschaft im allgemeinen nicht für einfache Gruppen gilt. Es wäre aber interessant zu wissen, was bei jeder Serie von einfachen Gruppen und bei den sporadischen einfachen Gruppen passiert. Dazu wäre es nützlich, generelle Formeln für die Indizes der großen Untergruppen und für die Grade der irreduziblen Charaktere zu haben.

Wir haben auch herausgefunden, daß es A_m gibt , mit m gerade aus $\mathbb{Z}_{\geq 6}$, die nicht in PC liegen. Man kann sich fragen, was bei den Schurschen Erweiterungsgruppen $\hat{A}_n$ passiert. Ohne weiter auf dieses Thema einzugehen, sei hier bemerkt, daß der Schurmultiplikator von A_5 gleich 2 ist, und daß eine Gruppenisomorphie $2.A_5 \cong SL(2,5)$ auftritt. Damit ist per Definitionem $\hat{A}_5 \cong SL(2,5)$. $\hat{A}_5$ liegt nicht in PC, da seine irreduziblen Charaktere von Grad 5 und 6 beide monomial sind. Wenn man eine geschickte Darstellung hat, läßt sich der Untergruppenverband von $\hat{A}_6$ mit Hilfe von GAP ohne weiteres bilden, und ist es nicht mehr schwierig, die PC-Eigenschaft zu überprüfen. Über die Theorie der Schurschen Erweiterungen findet man zum Beispiel in Huppert [7], ab Seite 181.

3. B-Gruppen

3.1 B–Gruppen, Einführung

In [12] und [13] haben R.W. van der Waall und A. Bensaïd die endlichen Gruppen betrachtet, deren sämtliche Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind. In diese Arbeiten blieben aber einige Gruppen unberücksichtigt, wofür noch zu zeigen sei, daß diese die obengenannte Eigenschaft befriedigen. Mein Ziel ist es dies zu beweisen. Dazu werde ich erst einige Definitionen und Notationen einführen.

Definition 3.1 *Man nennt die Gruppe G eine B–Gruppe, wenn je zwei Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind in G . Man schreibt $G \in \mathcal{B}$. Man nennt die Gruppe G eine Iso-Gruppe, wenn je zwei Untergruppen gleicher Ordnung isomorph sind.*

Beispiele Mit der `TableOfMarks`–Funktion läßt sich schnell zeigen daß die nächste Gruppen in $\mathcal{B}$ liegen:
i) $SL(2,3)$,
ii) A_5,
iii) $SL(2,5)$.

Jetzt folgen einige wichtige Eigenschaften. Beweise sind leicht oder sind zu finden in [12]

1. Eine B–Gruppe ist eine Iso-Gruppe.
2. Untergruppen von B-Gruppen sind Iso-Gruppen.
3. Falls G eine B–Gruppe ist, dann auch die Faktorgruppe G/N, mit N einem Normalteiler von G.

Weitere Eigenschaften sind auch in oben erwähnten Arbeiten zu finden.

In diesem Kapitel werde ich beweisen, daß die nächsten Gruppen B–Gruppen sind. Die Gruppen sind in auflösbare und nicht–auflösbare aufgeteilt. Weshalb wir gerade diese Gruppen untersuchen, wird sich später noch zeigen.

Auflösbar	Ordnung	Nicht–Auflösbar	Ordnung
$SL(2,3)\ltimes(Z_5 \times Z_5)$	600	$SL(2,5)\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$	14 520
$SL(2,3)\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$	2 904	$SL(2,5)\ltimes(Z_{19} \times Z_{19})$	43 320
$(SL(2,3) \times Z_5)\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$	14 520	$SL(2,5)\ltimes(Z_{29} \times Z_{29})$	100 920
		$SL(2,5)\ltimes(Z_{59} \times Z_{59})$	417 720

Eine einfache Art und Weise, solches zu zeigen, ist, die betreffende Gruppe G in GAP zu konstruieren, und GAP den Untergruppenverband bilden zu lassen. Wenn GAP imstande ist, den Verband zu berechenen, erhalten wir eine Liste von Klassen von konjugierten Untergruppen zusammen mit der Länge jeder Klasse und die Ordnung der Elemente der Klasse, also die Untergruppen. Wenn jede zwei Klassen von konjugierten Untergruppen, Untergruppen verschiedener Ordnung enthält, sind also alle Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert, und G ist eine B–Gruppe.

Es gibt hier aber zwei Probleme: Erstens müssen wir eine Darstellung bilden, die GAP akzeptiert. Zweitens habe ich im Kapitel 2 schon bemerkt, daß GAP nur Verbände von Gruppen der Ordnung bis zu 5000 ohne weiteres berechnen kann. Trotzdem kam GAP bei allen bis auf die zwei größten zu Ergebnissen. Außerdem zeigt ein theoretischer Beweis, daß die vier nicht-auflösbare Gruppen aus der obigen Liste in $\mathcal{B}$ liegen.

Für zyklische Gruppen und spezielle lineare Gruppen gibt es spezielle Konstruktionen in GAP. Außerdem gibt es einen Befehl `SemidirectProduct`. Leider ist für eine Gruppe, die man mit dieser Funktion erhält, der `Lattice`–Befehl nicht definiert. Deshalb müssen wir eine andere Darstellung konstruieren. Wir werden aber sehen, daß die zu betrachtende Gruppen eine solche Struktur haben, daß sich eine geeignete Matrixdarstellung aus Gruppen bilden läßt, die sich leicht in GAP konstruieren lassen.

Wenn wir eine Matrix–Darstellung unserer Gruppe erworben haben, können wir diese im Prinzip dem `Lattice`–Programm geben. Bei kleineren Gruppen wird dieses funktionieren: In diesem Programm bildet GAP eine Permutationsdarstellung der Gruppe durch die Gruppe operieren zu lassen auf den Verein der Bahnen von G. Eine Permutationsdarstellung berechnet es, weil GAP mit einer solchen Darstellung meistens am schnellsten rechnet. In unseren Fällen existieren aber viel kleinere Permutationsdarstellungen.

Wir betrachten immer ein semidirektes Produkt $A \ltimes B$ wobei $\mathrm{ggT}(|A|\ ,\ |B|) = 1$, und B ein direktes Produkt von zwei zyklischen Gruppen von Primzahlordnung p ist. Wenn man im allgemeinen eine Gruppe wie B hat, das heißt, ein direktes Produkt Z von, sagen wir, n Gruppen Z_i, $i = 1, \ldots, n$, derart daß jede $Z_i =< z_i >$ eine Gruppe von Ordnung p ist, dann existiert ein Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \phi : Z & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{V} \\ (z_1^{a_1}, \ldots, z_n^{a_n}) & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

zur additiven Gruppe $\mathcal{V}$ des Vektorraums von Dimension n über den Primkörper $\mathbb{F}_p$. Wir können also unsere Gruppe B identifizieren mit diesem Vektorraum. Die Automorphismusgruppe eines Vektorraums von Dimension n über $\mathbb{F}_p$ ist isomorph mit $GL(n, \mathbb{F}_p)$, die allgemeine lineare Gruppe von Dimension n, mit Eingaben in $\mathbb{F}_p$. Bemerke außerdem, daß die Untergruppen von Ordnung p von B dann den 1–dimensionalen Teilräumen von $\mathcal{V}$ entsprechen. Wieder im allgemeinen gilt:

Lemma 3.2 *Sei $Z \cong Z_1 \times \ldots \times Z_n$, mit $|Z_i| = p$, $i = 1, \ldots, n$. Dann enthält Z ingesamt $(p^t - 1)/(p - 1)$ Untergruppen von Index p.*

Beweis Zähle alle verschiedene Basen für einen $(n-1)$–dimensionalen Teilraum von $\mathcal{V}$. $\|$

Insbesondere ergibt sich, daß es in der Gruppe B genau $(p+1)$ Untergruppen von Ordnung p, oder, gleichwertig, $(p+1)$ 1-dimensionale Teilräume gibt.

Die Semidirektheit des Produkts $A \ltimes B$ bedeutet genau, daß die Gruppe A durch Konjugation auf der Gruppe B beziehungsweise auf dem Vektorraum $\mathcal{V}$, und wir erhalten, daß wir $\mathcal{V}$ immer als einen $\mathbb{F}_p(GL(2,\mathbb{F}_p)) - Modul$ betrachten können. Bemerke dazu daß in den nächsten Abschnitten $A \cong SL(2,3)$, $A \cong (SL(2,3) \times Z_5)$ oder $A \cong SL(2,5)$ gilt. Auf diese Weise können wir eine Darstellung unserer Gruppen konstruieren, vorausgesetzt, daß wir die Gruppe A als eine Untergruppe in $GL(2,\mathbb{F}_p)$ einbetten können. Wenn wir so eine Darstellung mit Eingaben in $\mathbb{F}_p$ ermittelt haben, können wir jedes Element g aus $A \ltimes B$ repräsentieren als

$$g = (a(g)_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & u \\ \gamma & \delta & v \\ . & . & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad a(g)_{ij} \in \mathbb{F}_p, \quad i,j = 1,\dots,3.$$

wo die vier griechische Buchstaben zusammen ein Element aus A, und die zwei lateinische ein Element aus B bezeichnen. Wenn wir genügend Elemente haben um die ganze Gruppe zu erzeugen, können wir diese Darstellung GAP geben. Die Aufgabe, die sich stellt, ist also, in jedem Fall ausfindig zu machen, ob und wie A als Untergruppe in $GL(2,\mathbb{F}_p)$ enthalten ist.

Aus dieser Darstellung können wir jetzt auch eine kleinere Permutationsdarstellung basteln: Die Gruppe wird vollständig beschrieben durch ihre Operation auf dem Vekrorraum $\mathcal{V}$, und wir können GAP mit der Funktion `Operation` fragen, wie die Gruppe die nichttrivialen Vektoren permutiert. Auf diese Weise bekommen wir eine Permutationsdarstellung auf (p^2-1) Punkten.

Ein anderes Problem ist, daß GAP nur von Gruppen mit einer Ordnung bis 5000 den vollständigen Untergruppenverband bestimmt. Sei gegeben eine Gruppe G. In dem `Lattice`–Programm berechnet GAP erstens das auflösbare Residuum P von G, das ist die Faktorgruppe G/H von G, mit H einem minimalen Normalteiler H von G derart, daß G/H auflösbar ist. Darauf sucht es P auf in dem GAP–Katalog von perfekten Gruppen, das sind die Gruppen, die gleich ihre Kommutatorgruppe sind, und erhält eine Liste von Vetretern perfekter Untergruppen, womit es weiterrechnet. In dieser Liste stehen nur Gruppen von einer Ordnung bis zu 5000, ergänzt mit den einfachen Gruppen $SL(3,3)$, M_{11} und A_8, was ich im vorigen Kapitel benutzt habe. Wenn man aber GAP eine Liste perfekter Untergruppen gibt, ignoriert es den Katalog und rechnet mit der Liste. Wir sehen endgültig, daß wir das `Lattice`–Programm auf jeden Fall für auflösbare Gruppen anwenden können. Bei nicht auflösbaren Gruppen müssen wir eine Liste von allen perfekten Untergruppen einführen oder erhalten einen eventuell unvollständigen Verband erhalten.

In den nächsten Abschnitten werde ich alle einzelne Gruppen erledigen, die sich von GAP bearbeiten lassen. Im letzten Abschnitt werde ich in einem theorerischen Beweis zeigen, daß die nicht-auflösbaren Gruppen in obengenannter Liste in $\mathcal{B}$ liegen.

3.2 Klassifikation auflösbarer B–Gruppen

Sei gegeben eine Gruppe G mit einem Normalteiler M von Typ $M \cong (Z_p \times Z_p)$, mit einer Primzahl p. Setze voraus, daß G eine B–Gruppe ist. Der nächste Satz reduziert dieses auf drei Fälle:

Satz 3.3 (R.W. van der Waall, [13], Theorem 8.) *Seien M ein minimaler Normalteiler der B–Gruppe G mit $M \cong (Z_p \times Z_p)$ und p eine Primzahl. Sei weiter vorausgesetzt, daß $G/\mathbf{C}_G(M)$ auflösbar ist, wenn $p = 11, 19, 29$ oder 59. Sei $M_1 < M$ eine Untergruppe von M von Index gleich p. Dann tritt einer der nächsten Fälle auf:*

1. *$G/\mathbf{C}_G(M) \cong C_{t(p+1)}$ mit $2^k \| (p-1)$, $2^k \| t$, $t|(p-1)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Betrachte $G/\mathbf{C}_G(M)$ als eine Untergruppe der Automorphismusgruppe $Aut(M)$. Dann ist $PAut(M) \cap G/\mathbf{C}_G(M)$*

eine zyklische Gruppe von Ordnung t. Das heißt, daß $\mathbf{N}_G(M_1)/\mathbf{C}_G(M)$ von Ordnung t ist.

2. *$G/\mathbf{C}_G(M) \cong (< S, \lambda > \times \; T)$, wo $|\lambda| = 2^{k+1}$, $|\sigma| = \frac{p+1}{2} \not\equiv 0(mod 2)$ mit $S =< \sigma >$, $\lambda^{-1}\sigma\lambda = \sigma^{-1}$, und T zyklisch ungerader Ordnung; $T < \lambda^2 >$ operiert als $PAut(M) \cap G/\mathbf{C}_G(M)$ auf M und $T < \lambda^2 > \cong \mathbf{N}_G(M_1)/\mathbf{C}_G(M)$; bemerke daß $|T|$ ein Teiler von $p-1$ ist, und daß außerdem $2^k \| (p-1)$, wo $k \geq 1$ in diesem Fall.*

3. *entweder $p = 5$ und $G/\mathbf{C}_G(M) \cong SL(2,3)$ oder $p = 11$ und $G/\mathbf{C}_G(M) \cong (SL(2,3) \times Z_u)$, mit $u = 1$ oder $u = 5$.*

In den Fällen 1) und 2) operiert $G/\mathbf{C}_G(M)$ als eine Gruppe semilinearer Transformationen auf dem 2–dimensionalen $\mathbb{F}_p$–Raum M. Da G eine B–Gruppe ist, gilt in diesen drei Fällen, daß $p \nmid |G/\mathbf{C}_G(M)|$.

In [13] war noch zu zeigen, daß die im Fall 3) auftretende Gruppen in der Tat B–Gruppen sind. Wir beweisen das im folgenden.

3.2.1 SL(2,3) $\ltimes$ (Z5 x Z5)

Wir möchten eine Darstellung von $SL(2,3)$ finden, als (2x2)–Matrixgruppe, mit Eingaben in $\mathbb{F}_5$. Ich habe schon genannt, daß $2.A_5 \cong SL(2,5)$. A_5 enthält als maximale Untergruppe A_4, aber dann enthält $2.A_5$ die Gruppe $2.A_4$ als Untergruppe, und diese letzte ist isomorph mit $SL(2,3)$. Wir können GAP fragen den Untergruppenverband von $SL(2,5)$ auszurechnen. Wenn wir einen Vertreter aus der einzigen Klasse von Untergruppen von Ordnung 24 nehmen, haben wir eine Matrixdarstellung über $\mathbb{F}_5$ von $SL(2,3)$. Damit können wir die definierenden Elemente von $G_1 := SL(2,3) \ltimes (Z_5 \times Z_5)$ aufschreiben: Es gilt, daß $G_1 \cong < s_1, s_2, z_1, z_2 >$ mit

$$s_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wo $< s_1, s_2 > \cong SL(2,3)$ und $< z_1, z_2 > \cong (Z_5 \times Z_5)$. Wenn wir diese Darstellung GAP geben, erhalten wir unterstehendes Verband, woraus wir schließen, daß G_1 eine B–Gruppe ist:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	11	1	25
2	25	2	12	1	50
3	100	3	13	4	75
4	75	4	14	3	100
5	6	5			
6	100	6	15	4	150
7	25	8	16	1	200
8	30	10			
9	30	20			
10	25	24	17	1	600

3.2.2 SL(2,3) $\ltimes$ (Z11 x Z11)

Jetzt möchten wir versuchen zu beweisen, daß die Gruppe $SL(2,3)$ als Untergruppe einer linearen Gruppe über den Körper $\mathbb{F}_{11}$ auftritt. Wenn wir im ATLAS, siehe [4], uns die maximalen

Untergruppen der Gruppe $L_2(11) = PSL(2,11)$ ansehen, sehen wir, daß zwei Klassen von konjugierten Untergruppen von Typ A_5 maximal in $PSL(2,11)$ liegen. Auch wird erwähnt, daß $2.PSL(2,11) \cong SL(2,11)$ ist. Deshalb ist $2.A_5$ eine Untergruppe von $SL(2,11)$. Wie oben liegt $SL(2,3)$ innerhalb $2.A_5$ und damit in $SL(2,11)$. Es gibt zwei Klassen von konjugierten Untergruppen von Ordnung 24 in $SL(2,11)$. Mit Hilfe der GAP–Funktion `GroupId`, die den Isomorphietyp von unter anderem Gruppen mit einer Ordnung bis zu 100 bestimmt, können wir gleich bestimmen welche Klasse Gruppen enthält die isomorph zu $SL(2,3)$ sind. So erhalten wir nächste Darstellung für $SL(2,3)$ als Matrixgruppe mit Eingaben in $\mathbb{F}_{11}$. Wie oben läßt sich dann schnell eine Darstellung für die ganze Gruppe $G_2 := SL(2,3) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ berechnen. Es gilt daß $SL(2,3) \cong < a_1, a_2 >$ mit

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Die GAP–Funktion `PermGroup` gibt uns eine, in diesen Fall nicht sehr gepflegte, Permutationspräsentation, womit wir aber ausreichend schnell den Untergruppenverband ausrechnen können, und schließen daß G_2 eine B–Gruppe ist:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	10	1	121
2	121	2	11	1	242
3	484	3	12	4	363
4	363	4	13	3	484
5	484	6	14	4	726
6	121	8	15	1	968
7	12	11			
8	132	22			
9	121	24	16	1	2904

3.2.3 (SL(2,3) x Z5) $\ltimes$ (Z11 x Z11)

Wie in 3.2.2 können wir $SL(2,3)$ in $\mathbb{F}_{11}$ einbetten. Es gilt, daß $GL(2,11) \cong (Z_5 \times SL(2,11).2)$, siehe ATLAS [4], und das Zentrum von $GL(2,11)$ wird gegeben von $Z_5 \times Z(SL(2,11)) \cong (Z_5 \times Z_2)$. Wenn wir also einen Erzeuger der 5–Sylowgruppe des Zentrums $GL(2,11)$ nehmen, zusammen mit dem alten Erzeuger für $SL(2,3)$, erhalten wir eine Darstellung der Gruppe

$$G_3 \cong (SL(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$$

über $\mathbb{F}_{11}$. Es gilt daß $G_3 \cong < a_1, a_2, c_1 >$, mit a_1 und a_2 wie bei der obigen Gruppe und mit

$$c_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Herstellen einer Permutationsdarstellung sehen wir wieder aus dem Untergruppenverband, daß G_3 eine B–Gruppe ist, und damit sind die drei aulösbaren Fälle erledigt. Da der Untergruppenverband von G_2 im Verband von G_3 enthalten ist, schreibe ich nur die neuen Klassen auf.

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
17	121	5	26	1	605
18	121	10	27	1	1210
19	484	15	28	4	1815
20	363	20	28	3	2420
21	484	30	29	4	3630
22	121	40	30	1	4840
23	132	55			
24	132	110			
25	121	120	31	1	14520

3.3 Klassifikation nicht-auflösbarer B–Gruppen

In ihrem Artikel über nicht-auflösbare B–Gruppen [14] haben A. Bensaïd und R.W. van der Waall den nächsten Satz bewiesen, der hier in einer angepaßten Fassung präsentiert wird. Der Beweis, daß diese Anpassung gerechtfertigt ist, folgt später.

Satz 3.4 ([12], Theorem 11.) *Sei G eine nicht-auflösbare B–Gruppe, deren 2–Sylowgruppen Quaternionengruppen der Ordnung 8 sind. Dann ist G in einer der folgenden sieben Mengen enthalten.*
i) $SL(2,5) \times H, \qquad ggT(|H|, 30) = 1;$
ii) $(SL(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})) \times H, \qquad ggT(|H|, 330) = 1;$
iii) $(SL(2,5) \ltimes (Z_{19} \times Z_{19})) \times H, \qquad ggT(|H|, 570) = 1;$
iv) $(SL(2,5) \ltimes (Z_{29} \times Z_{29})) \times H, \qquad ggT(|H|, 870) = 1;$
v) $((SL(2,5) \ltimes (Z_{29} \times Z_{29})) \times H) < c >$, *mit* $|c| = 7^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $H^c = H$, $[SL(2,5), c] = \{1\}$, $t^c = t^{16}$ *für alle* $t \in (Z_{29} \times Z_{29})$, $c^7 \in H, \qquad ggT(|H|, 870) = 1;$
vi) $(SL(2,5) \ltimes (Z_{59} \times Z_{59})) \times H, \qquad ggT(|H|, 1770) = 1;$
vii) $((SL(2,5) \ltimes (Z_{59} \times Z_{59})) \times H) < d >$, *mit* $|d| = 29^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $H^d = H$, $[SL(2,5), d] = \{1\}$ $t^d = t^4$ *für alle* $t \in (Z_{59} \times Z_{59})$, $d^{29} \in H, \qquad ggT(|H|, 1770) = 1;$
Außerdem gilt in den Fällen ii), iii), iv) und vi) daß $\mathbf{C}_G(C) = (Z_p \times Z_p) \times H$, *für jede zyklische Untergruppe C der Ordnung p von $Z_p \times Z_p$. In den Fällen i), ii), iii), iv) und vi) ist H eine auflösbare B–Gruppe, während in den Fällen v) und vii) $H < c >$ und $H < d >$ auflösbar sind und in $\mathcal{B}$ liegen.*

Die Kommutatorgruppe von $SL(2,5)$ ist gleich $SL(2,5)$ und deshalb ist $SL(2,5)$ eine nicht-auflösbare Gruppe. Wir habe schon gesagt daß $SL(2,5)$ eine zentrale Erweiterung mit Multiplikator 2 von der einfachen Gruppe A_5 ist. Das Zentrum von $SL(2,5)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung zwei. Im auflösbaren Fall haben wir schon einige Untergruppenverbände gesehen, und wir werden Wiederholungen später ausschließen, wenn wir jetzt den Untergruppenverband von $SL(2,5)$ geben:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	7	5	8
2	1	2	8	6	10
3	10	3	9	10	12
4	15	4	10	6	20
5	6	5	11	5	24
6	10	6	12	1	120

3.3.1 SL(2,5) $\ltimes$ (Z11 x Z11)

Wie oben gesagt, liegt $SL(2,5)$ maximal in $SL(2,11)$, und es gibt zum Beispiel die Darstellung $SL(2,5) \cong < s_1, s_2 >$ wo,

$$s_1 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

Hier werden die Gruppen größer. Es wird also jetzt lohnend, eine kleinere Darstellung zu berechnen für die ganze Gruppe $G_4 = SL(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$. Am besten wird dieses illustriert von den bezüglichen GAP–Befehlen, die im Anhang aufgenommen sind. Am Ende dieses Abschnitts werde ich allgemeinen zeigen, wie der Untergruppenverband einer Gruppe der Gestalt $SL(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ aussieht. Jedenfalls ist GAP bei dieser Gruppe noch imstande, den Untergruppenverband schnell auszurechnen.

3.3.2 SL(2,5) $\ltimes$ (Z19 x Z19)

A_5 ist eine maximale Untergruppe von $PSL(2,19)$, $SL(2,19) \cong 2.PSL(2,19)$, folglich ergibt sich $SL(2,5)$ als maximale Untergruppe von SL(2,19). Es gilt, daß $SL(2,5) \cong < d_1, d_2 >$ mit

$$d_1 = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix},$$

Das normale `Lattice`–Programm für Gruppen, präsentiert als eine Permutationsgruppe, brauchte für diese Gruppe, auch in der kleinen Darstellung, zuviel Speicherplatz und hat keine Ergebnisse ermittelt. Nur mit Hilfe eines Umwegs war es möglich, den Verband zu bilden, und mit Hilfe von GAP zu beweisen, daß auch diese Gruppe eine B–Gruppe ist. Diese war die größte Gruppe mit Möglichkeiten für GAP. Obwohl die zwei übergebliebenen Gruppen nicht mehr Struktur haben als die Gruppen, die wir schon betrachtet haben, werden die Darstellungen zu groß.

3.3.3 Der allgemeine Fall

Bevor wir beweisen können, daß die Gruppen $SL(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ aus Satz 3.4 für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ in $\mathcal{B}$ liegen, benötigen wir einige Bemerkungen über Hall–Gruppen und einen Hilfsatz.

Definition 3.5 *Sei π eine Menge von Primzahlen. Eine Untergruppe U der Gruppe G nennen wir eine π–Untergruppe, wenn $|U|$ nur Primteiler aus π enthält. Die Untergruppe H von G heißt eine π–Hallgruppe von G, wenn gilt:*

1. *$|H|$ enthält nur Primteiler aus π.*
2. *$|G : H|$ enthält keinen Primteiler aus π.*

Wenn H eine π–Hallgruppe ist zu irgendeiner Menge π von Primzahlen, dann heißt H eine Hallgruppe von G.

Sei wieder π eine Menge von Primzahlen. Man sagt, daß in einer Gruppe G der π–Sylow–Satz gilt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist U eine π–Untergruppe von G und V eine maximale π–Untergruppe von G, so gibt es ein $g \in G$ mit $U^g \leq V$.

Satz 3.6 (P.Hall) *Ist G auflösbar, so hat G π–Hallgruppen zu jedem π. Je zwei π–Hallgruppen von G sind konjugiert in G, und jede π–Untergruppe von G liegt in einer π–Hallgruppe von G.*

Es gilt also in jeder auflösbaren Gruppe der π–Sylowsatz. Der nächste Satz, der Satz von Maschke, sagt uns, daß man unter bestimmten Voraussetzungen einen Modul direkt in Teilmoduln zerlegen kann. Den Satz und den Beweis findet man in [7], I Satz.17.7, Seite 123.

Satz 3.7 *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, und K ein Körper mit $Char(K) \nmid n$. Seien V ein $K[G]$–Modul und V_1 ein $K[G]$–Teilmodul von V. Wir setzen voraus, daß $(va)g = v(ag)$, für alle $v \in V$, für alle $a \in K$ und für alle $g \in G$. Dann gibt es eine direkte Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ von V als $K[G]$–Modul.*

Folgenden Satz werden wir auch anwenden. Der Satz ist wesentlich dem Theorem 8 aus [12] ähnlich.

Satz 3.8 *Sei G eine B–Gruppe. Setze voraus, daß $4 \mid |G|$, aber 8 nicht. Sei $N \lhd G$, mit $G/N \cong A_5$. Dann gibt es $T \unlhd G$ mit $T \cong A_5$ und $G = NT$. Es gilt daß $N \cap T = \{1\}$, mit N eine B–Gruppe wofür $ggT(30, |N|) = 1$.*

Jetzt sind wir imstande, den Hauptsatz aus diesem Abschnitt zu beweisen.

Satz 3.9 *Sei $G = K \ltimes (Z_p \times Z_p)$, mit $K \cong SL(2,5)$, $p \in \{11, 19, 29, 59\}$. Sei $\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) = (Z_p \times Z_p)$ für jede $\mathcal{P} \leq (Z_p \times Z_p)$ mit $|\mathcal{P}| = p$. Dann ist G eine B–Gruppe.*

Zum Beweis formulieren wir zuerst einen Hilfsatz.

Lemma 3.10 *Sei G eine B–Gruppe und $H \leq G$, $H \cong SL(2,5)$, wobei $G = H \ltimes (Z_p \times Z_p)$, mit $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ Man nehme an, daß $\mathcal{P}$ eine Untergruppe der Ordnung p von G sei. Dann $\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) = (Z_p \times Z_p)$.*

Beweis. Es sei angenommen, daß das Lemma falsch wäre. Wähle eine Untergruppe $\mathcal{P}$ der Ordnung p von $(Z_p \times Z_p)$. Es gibt ein Element $g \in G \backslash (Z_p \times Z_p)$ das $\mathcal{P}$ zentralisiert, mit anderen Worten, g operiert auf triviale Weise auf $\mathcal{P}$ durch Konjugieren. Wir können jetzt 3.7 anwenden, da $ggT(|g|, p) = 1$ und sehen daß es eine Untergruppe $\mathcal{Q} \leq (Z_p \times Z_p)$ gibt mit $\mathcal{Q}^g = \mathcal{Q}$. Außerdem gilt, daß $(Z_p \times Z_p) = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Wegen der B–Eigenschaft sind die Gruppen $\mathcal{P} < g >$ und $\mathcal{Q} < g >$ abelsch von gleicher Ordnung, und da g nun auf triviale Weise operiert auf sowohl $\mathcal{P}$ wie $\mathcal{Q}$, operiert g auf triviale Weise auf die ganz $(Z_p \times Z_p)$, das heißt

$$\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p) > (Z_p \times Z_p)$$

Wir haben, daß $\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p) \unlhd G$.

$*$ Sei $\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p) = G$. Dann operiert die ganze Gruppe G auf triviale Weise auf $(Z_p \times Z_p)$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß G eine B–Gruppe ist.

$*$ Es gibt nur einen nicht–trivialen Normalteiler in $SL(2,5)$, und der wird gegeben von dem Zentrum der Ordnung zwei: $Z_2 \cong Z(SL(2,5))$. Es wäre also noch möglich daß $\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p) \cong Z_2 \times (Z_p \times Z_p)$. Dann ergibt sich, daß $G/\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p) \cong A_5$. Z_2 ist charakteristisch in $SL(2,5)$ und deswegen gibt es ein $U \unlhd G$ mit $|U| = 2$, aber dann ist, wegen Eigensschaft 3, siehe Abschnitt 3.1, von B–Gruppen, auch G/U eine B–Gruppe, derart, daß

$$\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p)/U \cong Z_2 \times (Z_p \times Z_p)/U \cong (Z_p \times Z_p).$$

Bemerke, daß $|G/U| = p^2.2^2.3.5$ und daß $\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p)/U \trianglelefteq G/U$ mit $(G/U)/(\mathbf{C}_G(Z_p \times Z_p)/U) \cong A_5$. Wir sehen, daß wir 3.8 benutzen können, und so erhalten wir die Existenz einer $T/U \trianglelefteq G/U$ mit $T/U \cong A_5$, also $G/T \cong (Z_p \times Z_p)$. Deswegen gilt $G = T(Z_p \times Z_p)$. Wegen den Gruppenordnungen gilt, daß $(|T|, p) = 1$ oder, $T \cap (Z_p \times Z_p) = 1$. Außerdem gilt, daß $T \trianglelefteq G$, und wir erhalten endgültig, daß $G \cong T \times (Z_p \times Z_p)$, aber das ist keine B–Gruppe. Widerspruch. $\|$

Jetzt beweisen wir den Satz 3.9

Beweis

Wir benutzen ständig, daß jede $H \leq G$ mit $p \mid |H|$ eine normale Sylow–p–Untergruppe enthält. Wir haben zu zeigen daß je zwei Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind. Wir werden den Beweis aufspalten in verschiedene Teile.

1) $A, B \leq G$ mit $|A| = |B|$, und $p^2 \mid |A|$.

$G/(Z_p \times Z_p) \cong SL(2,5)$ ist eine B–Gruppe. Aber dann sind $A/(Z_p \times Z_p)$ und $B/(Z_p \times Z_p)$ konjugiert in $G/(Z_p \times Z_p)$. Also sind A und B in G konjugiert.

2) $A, B \leq G$ mit $|A| = |B|$ und $p \nmid |A|$. A und B auflösbar.

Betrachte Untergruppen U und V von G mit $(Z_p \times Z_p) \trianglelefteq U$, $|U| = |V| < |G|$. Dann sind $U/(Z_p \times Z_p)$ und $V/(Z_p \times Z_p)$ auflösbar. Bemerke auch daß, da $U/(Z_p \times Z_p)$ und $(Z_p \times Z_p)$ auflösbar sind, U selbst auflösbar ist. Aus 1) erhalten wir daß U und V konjugiert sind in G. Aber dann sind wegen des Hallschen Satzes alle Untergruppen der Ordnung $|U|/p^2$ von U miteinander konjugiert in U. Der Konjugiertheit von U und V halber, sind daher alle Untergruppen der Ordnung $|U|/p^2$ von G miteinander konjugiert in G: Wähle jetzt zwei verschiedene Untergruppen A und B derart daß $|A| = |B|$ und $p \nmid |A|$. Sei nun $U := A(Z_p \times Z_p)$ und $V := B(Z_p \times Z_p)$. $U \sim_G V$, und es gibt $g \in G$ mit $U^g = V$. Aber dann auch $A^g \leq V$. Alle Untergruppen der Ordnung $|U|/p^2$ sind innerhalb V miteinander konjugiert, und es ergibt sich endgültig daß $A \sim_G A^g \sim_G B$.

3) $H, T \leq G$, mit $H \cong T$, H nicht auflösbar, $p \nmid |H|$.

Es folgt daß $H \cong T \cong SL(2,5)$, und wegen des Satzes von Schur–Zassenhaus sind alle zu H isomorphen Untergruppen konjugiert.

4) Untergruppen H und T mit $|H| = |T|$ und $p \parallel |H|$.

Bis jetzt konnten wir den Beweis führen für allgemeine $p \in \{11, 19, 29, 59\}$, aber jetzt teilt es sich für jede Primzahl p.

p = 11

a) Untergruppen der Ordnung 11.

Im allgemeinen gilt für eine Untergruppe H einer Gruppe G daß

$$\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{C}_G(H) \quad \hookrightarrow \quad Aut(H)$$

Sei hier $\mathcal{P}$ eine Untergruppe der Ordnung 11 von G. Da $Aut(\mathcal{P}) \cong Z_{10}$ ergibt sich, daß $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})\ /\ \mathbf{C}_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{10}$. Es gibt $\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) \cong (Z_{11} \times Z_{11})$. Andererseits ist bekannt, daß der Index $|G : \mathbf{N}_G(\mathcal{P})|$ gleich die Anzahl der sämtlichen Untergruppen von G ist, die zu $\mathcal{P}$ konjugiert sind. Wir haben

$$|G : \mathbf{N}_G(\mathcal{P})| \quad < \quad 12,$$

weil G nur 12 Untergruppen der Ordnung 11 enthält. Nun ist $|G/(Z_{11} \times Z_{11}| = 120 = 2^3.3.5$, und daher $|G : \mathbf{N}_G(\mathcal{P})| = 12$, womit also alle Untergruppen von G der Ordnung 11 konjugiert sind.

b) Untergruppen der Ordnung $11.t$, mit $t > 1$ und $11 \nmid t$.

Sei H eine solche Untergruppe. Aus der ersten Bemerkung dieses Beweises sehen wir, daß es genau eine $\mathcal{P} \leq G$ gibt mit $|\mathcal{P}| = 11$ und $H \leq \mathbf{N}_G(\mathcal{P})$, und aus a) sehen wir daß $|\mathbf{N}_G(\mathcal{P}) : \mathcal{P}| = 2.5.11$. Dann ist also $H/\mathcal{P}$ eine Hall–t–Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ für $t \in \{\{2\}, \{5\}, \{2,5\}\}$ Da $\mathcal{P} \trianglelefteq \mathbf{N}_G(\mathcal{P})$ und $\mathcal{P}$ wie $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ auflösbar ist, gilt daß $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})$ auflösbar ist, und aus dem Hallschen Satz folgt daß alle Untergruppen gleicher Ordnung von $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})$ innerhalb $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})$ konjugiert sind. Dann läßt sich schließen, daß alle Untergruppen der gleicher Ordnung $11.t$ als H konjugiert sind, wegen der Normalteiler–Eigenschaft der zugehörigen $\mathcal{P}$. Jetzt sind wir fertig für $p = 11$.

p = 19

G enthält 20 Untergruppen der Ordnung 19. Sei $\mathcal{P}$ eine solche Untergruppe. Für $\mathcal{P}$ gilt, daß $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{18}$ und dann auch $|\mathbf{N}_G(\mathcal{P})| : |(Z_{19} \times Z_{19})| = 6$. Und damit sind wieder alle Untergruppen der Ordnung 19 konjugiert. Sei $H \leq G$ mit $|H| = 11.t$, wo $11 \nmid t$, $t > 1$. Argumentiere jetzt wie bei $p = 11$, aber hier für Hall–t–Untergruppen mit $t \in \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

p = 29

Sei $\mathcal{P} \leq (Z_{29} \times Z_{29})$ mit $|\mathcal{P}| = 29$. Es gibt ingesamt 30 Untergruppen der Ordnung 29. $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{28}$ und dann $|\mathbf{N}_G(\mathcal{P})| : |(Z_{29} \times Z_{29})| = 4$. Alle Untergruppen der Ordnung 29 sind also konjugiert. Sei jetzt H eine Untergruppe der Ordnung 4.29. Es gibt genau eine Untergruppe $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P} = 29$ und $H \leq \mathbf{N}_G(\mathcal{P})$. $H/\mathcal{P}$ ist eine Hall–2–Gruppe in $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$, und ähnlich wie bei den obigen Primzahlen sind alle Untergruppen der Ordnung $|H|$ mit einander konjugiert in G. Sei $|T| = 2.29$, für $T \leq G$. Es gibt wieder genau eine $\mathcal{Q}$ mit $|\mathcal{Q}| = 29$ und $\mathcal{Q} \leq T$. $|T/\mathcal{Q}| = 2$, und es existiert eine $\mathcal{S} = Syl_2(\mathbf{N}_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q})$ mit $T/\mathcal{Q} \leq \mathcal{S}$. Innerhalb $\mathbf{N}_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q}$ sind alle Sylow–Gruppen konjugiert. Es folgt dann daß alle $W/\mathcal{Q}$, mit $|W| = |T|$ und $\mathcal{Q} \leq W$ konjugiert sind mit $T/\mathcal{Q}$ innerhalb von $\mathbf{N}_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q}$. Also sind alle Untergruppen der Ordnung 2.29, die $\mathcal{Q}$ enthalten, konjugiert in $\mathbf{N}_G(\mathcal{Q})$. Ab jetzt ist es wie oben.

p = 59

Die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung 59 beläuft sich auf 60. Es ist klar daß $\mathbf{N}_G(\mathcal{P})/\mathbf{C}_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{58}$ und $|\mathbf{N}_G(\mathcal{P})| = 2.59^2$, wenn $|\mathcal{P}| = 59$. Alle Untergruppen der Ordnung 59 sind also konjugiert in G. Mit dem Hallschen Satz kann man wieder zeigen, daß Untergruppen der Ordnung 2.59 mit einander konjugiert sind. Damit sind alle Untergruppen untersucht worden.

Dieses beweist den Satz 3.9. ||

Ohne weiteres Beweis gebe ich schließlich die Ordnungen und Länge der Klassen von konjugierten Untergruppen H von $SL(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$.

$H : p \nmid \lvert H\rvert$		$H : p \parallel \lvert H\rvert$			$H : p^2 \mid \lvert H\rvert$	
Ordnung	Zahl/p^2	p	Ordnung	Zahl	Ordnung/p^2	Zahl
1	1	11	11	$2^2.3$	1	1
2	1		22	$2^2.3.11$	2	1
3	10		55	$2^2.3.11$	3	10
4	15		110	$2^2.3.11$	4	15
5	6	19	19	$2^2.5$	5	6
6	10		38	$2^2.5.19$	6	10
8	5		57	$2^2.5.19$	8	5
10	6		114	$2^2.5.19$	10	6
12	10	29	29	$2.3.5$	12	10
20	6		58	$2.3.5.29$	20	6
24	5		116	$2.3.5.29$	24	5
120	1	59	59	$2^2.3.5$	120	1
			118	$2^2.3.5.59$		

3.4 Schlußfolgerung

Mit Hilfe eines theoretischen Beweises und mit Hilfe von GAP hat sich gezeigt, daß die Gruppen, die wir erforscht haben, alle in $\mathcal{B}$ liegen. Von den Gruppen, die im Satz 3.4 v) und vii) genannt werden, ist bis jetzt noch nicht bewiesen, daß es B–Gruppen sind. Aber mit Techniken ähnliche denen , die im letzten Beweis benutzt sind, soll der Beweis keine große Schwierigkeiten bereiten. GAP zeigte sich bei diesem Beispiel ein gewandtes Gerät fürs lenken der Gedanken.

Zum Abschluß sei noch folgendes erwähnt. Ohne Zweifel kann theoretisch bewiesen werden, daß die drei Ausnahmestrukuren in Teil 3) von Satz 3.3 jeweils eine B–Gruppe liefern, falls $\mathbf{C}_G(M) = M$, genau wie es für die Gruppen im Satz 3.9 getan worden ist. Das umgeht die Frage, ob zwei Gruppen gleicher Ordnung aus Teil 3) des Satzes 3.3 immer isomorph sind. Diese Fragen kann man sich auch für Gruppen des Satzes 3.9 stellen. Das Isomorphieproblem wurde gelöst, siehe ([15], IV(7.4)). Es stellt sich heraus, daß alle Gruppen in Satz 3.3, Teil 3), mit $\mathbf{C}_G(M) = M$, sowie alle Gruppe in Satz 3.4, mit $H = 1$, schon durch ihre Ordnung, bis auf Isomorphie, festliegen.

A. Appendix

A.1 Prozeduren

A.1.1 Ein Programm für die Berechnung von monomialen Charakteren

Dieses Programm ist geschrieben für GAP-3.3. In späteren Versionen gibt es `Group Characters`, und damit würde dieses Programm ein bischen anders aussehen. Das Prinzip ist dasselbe.

```
########################### p . m o n o #########################
# Dit programma berekent aan de hand van het ondergroepenrooster
# van een groep G de monomiale karakters van die groep uit door
# de lineaire  karakters van de ondergroepen te induceren.
# Versie : GAP-3.3

mono := function ( groep , info )
          ## groep is een groep
          ## info geeft het verband tussen de gerationaliseerde
          ## en normale karaktertabel van de groep.
 local kar,lat,cl,lijst,index,klijst,con,
       fus,inductie,werk,rat,oplossing,net,
       notrat,net,israt,m,i,j,opnot,tilt,k,y,w,v,z,x,triv;
 kar := CharTable( groep );
 Print( kar.irreducibles,"\n","\n");
 lat := Lattice( groep );
 cl := ConjugacyClassesSubgroups( groep );
          ## Bepaalt klassen ~H
 lijst := List ( cl , x -> Representative( x ));
          ## Kiest representant H uit ~H
 lijst := Filtered( lijst , x -> x <> groep ); ## Gooi 'groep'
          ## uit de lijst, daar deze alleen triviale
          ## monomiale karakters levert en dit verderop in
          ## het programma problemen bij het induceren geeft
 index := List(lijst , y -> Index( y,CommutatorSubgroup( y,y) ));
          ## Bepaalt aantal lineaire karakters voor elke H
 klijst := List( lijst , z -> CharTable( z));
 con := ConjugacyClasses( groep );
 fus := List( lijst , w -> FusionConjugacyClasses( w , groep  ));
```

```
         ## gaat na voor de conjugatieklassen van een ondergroep
         ## in welke conjugatieklassen  van G ze terechtkomen
 inductie := List ( klijst , v -> Induced( v , kar ,
    v.irreducibles{ [ 1..index[Position(klijst,v)] ] }));
         ## induceert de lineaire karakters van een ondergroep
         ## naar G.
 rat := RationalizedMat( kar.irreducibles );
 net := [];
 for i in inductie do
    for j in i do
       Add( net , j );
    od;   ##'net' bevat nu de niet-triviale monomiale karakters,
         ## gegeven door hun waardes op de conjugatieklassen
 od;      ## van G.
 net := Set( net );
############################# i s r a t ####################
# Bepaalt of er in een lijst van getalletjes  "niet-gehelen"
# voorkomen
israt := function( lijst )
 local l,k;
 l := Length( lijst );
 k := 1;
 while k <= l do
    if not IsInt( lijst[k] ) then
       return false;
    fi;
    k := k + 1;
 od;
 return true;
end;
#############################################################
 notrat := [];
 for m in net do   ## splits in rationale en niet-rationale
    if not israt( m ) then  ## karakters
       Add( notrat , m );
       Unbind( net[Position(net, m )]  );
    fi;
 od;
 opnot := [];
 if Length( notrat ) > 0 then   ## niet-rationaal
    for i in notrat do
       Add ( opnot , SolutionMat( kar.irreducibles , i ));
    od;
 fi;
 net := Set( net );   ## rationaal
 oplossing := List( net , x -> SolutionMat( rat , x ));
         ## Nu moet de oplossing nog gederationaliseerd worden:
 tilt := [];
 for i in [ 1 .. Length( oplossing ) ] do
```

```
    tilt[i] := [];
 od;
 for j in [ 1 .. Length ( oplossing ) ] do
    for k in [ 1 .. Length( info ) ] do
       tilt[ j ] [ k ] := oplossing[ j ] [ info[k] ];
    od;
 od;
 tilt := Set( tilt);
          ## We voegen de triviale monomiale karakters erbij :
 triv := lin( kar );
 UniteSet( tilt , triv );
          ## De triviale monomialen zijn alle
          ## verschillend en vormen dus een GAP-Set.
 tilt := Set( tilt );
 UniteSet( tilt , opnot );
 return tilt;
end;
```

Folgendes Programm nimmt nur die linearen Charaktere aus der Charaktertafel einer Gruppe , und gibt sie auf die von mir gewünschte Weise zurück:

```
################################ l i n ##########################
## Bepaalt de lineaire karakters van een karaktertafel <kar>.
## (Ontbonden in irreducibele constituenten)
## Aanname: In de karaktertabel komen eerst de lineaire karakters
lin := function(  kart )
 local lineair, hvhkl,m, n, t,j;
 lineair := [];
 hvhkl := Length( kart.orders );     ## # conjugatieklassen van G
 n := 1;
 while n <= hvhkl do
    t := [];
    for m in [1..(n-1)] do     ## maakt een ontbonden
       Add( t , 0 );     ## lineair karakter
    od;
    t[n] := 1;
    for j in [(n+1)..hvhkl] do
       Add( t , 0 );
    od;
    Add( lineair , t );
    n := n + 1;
    if n <= hvhkl then
       if kart.irreducibles[n][1] > 1 then     ## test of nieuw
          n := hvhkl + 1;     ## karakter lineair is
       fi;
    fi;
 od;
```

```
 return lineair;
end;
#################################################################
```

A.1.2 Ein Programm für die Berechnung von Permutationscharakteren

```
############## p . p e r m k a r a k t e r s ####################
## De functie perm( < groep > , < info > ) berekent een lijst van
## permutatiekarakters van de groep < groep > , door uit elke
## klasse van geconjugeerde ondergroepen een representant te nemen,
## voor deze representant het triviale karakter te definieren en
## dit te induceren naar < groep >; Vervolgens wordt het resultaat
## ontbonden in irreducibele karakters van < groep > , m.b.v de
## gerationaliseerde karaktertafel. < Info > geeft het verband
## tussen de gerationaliseerde en de gewone karaktertafel van
## < groep >.
## Versie : GAP-3.4

perm := function( groep, info )
 local cl,rep,con,triviaal,i,j,eenheid,ruw,rat,ratont,ontbond;
 Print( " #I Computing the lattice ...","\n");
 cl := ConjugacyClassesSubgroups( groep );
 rep := List( cl , Representative);
 con := List( rep, x ->  Length( ConjugacyClasses( x ) ) );
 triviaal := [];
 for i in [ 1 .. Length( con ) ] do   ## definieert het
    Add( triviaal , [] );   ## triviale karakter voor
    for j in [1 .. con [ i ] ] do   ## elke representant
       Add( triviaal[i] , 1 );
    od;
 od;
 eenheid := [];
 for i in [ 1 .. Length( con ) ] do
    Add( eenheid , ClassFunction( rep[i] , triviaal[i] ) );
 od;   ## Nu is de lijst van 1(H)'s klaar
 Print(" #I Inducing ...  ","\n" );
 ruw := List( eenheid, x -> x^groep );   ## induceer naar G
 rat := RationalizedMat( groep.charTable.irreducibles );
 ratont := List( ruw , x -> SolutionMat( rat , x.values ));
 ontbond := derat( ratont , info );
 return ontbond;
end;

#############################################################
derat :=  function ( oplossing,info )

## Verandert een lijst van lijsten <oplossing> , zoals
```

```
## aangegeven in <info>: B.v.b info = [1,2,2] betekent:
## voeg aan elke lijst uit <oplossing> een derde element,
## identitiek aan het tweede , toe.

 local tilt, i, j,k;
 tilt := [];
 for i in [ 1 .. Length( oplossing ) ] do
    tilt[i] := [];
 od;
 for j in [ 1 .. Length ( oplossing ) ] do
    for k in [ 1 .. Length( info ) ] do
       tilt[ j ] [ k ] := oplossing[ j ] [ info[k] ];
     od;
 od;
return ( tilt );
#############################################################
end;
```

A.1.3 Ein Programm für die Berechnung von Chi's mit dem Untergruppenverband

```
################# p . l a n g z a a m   ##################
## Dit programma gaat alle paren van ondergroepen na voor
## een groep om alle Chi's te vinden. Dit proces kan zeer
## veel tijd in beslag nemen.
langzaam := function( groep , permkarakters )
 local gezocht, gen, cl, og, ondergroepen, p_karakters,
 i, j, l, lijstvanchi, u, v;
 gezocht := [];

####################### g e n ###############################
gen := function( g, h, t )
## <g> is een groep, met ondergroepen <h> en <t>.
 local  ht, h_door_t, permht, permg, chi ;
 ht := Subgroup ( g , Union ( h.generators , t.generators ) ) ;
 ht.name := " ht ";
      ## Bepaal <h,t> en bepaal of <h,t>=g, zoniet verwerp.
 if Size ( ht ) = Size ( g ) then
    h_door_t := Intersection( h, t );   ## Bepaal doornede H en T
    h_door_t.name := " h_door_t ";
    permht := g.p_karakters[
             Position ( g.ondergroepen , h_door_t ) ];
    permg := g.p_karakters[ Length( g.p_karakters ) ];
      ## 1(G) is het laatste karakter in de lijst van p_karakters.
    chi := permht + permg - h.perm - t.perm;
      ## Berekent Chi.
    Print( "H : ",h,"#",Size(h),"\n","1h^g",h.perm,"\n");
    Add ( gezocht , chi );
```

```
 fi;
end;
##################### einde gen ###########################

 cl := ConjugacyClassesSubgroups( groep );
 Print( cl );
 og := List( cl , x -> Elements(x));
 ondergroepen := [];
 p_karakters := [];
 for i in [ 1 .. Length( og)] do
    for j in [1..Length( og[i]) ] do
       Add( ondergroepen, og[i][j] );
           ## Maakt een lijst van ondergroepen en een
           ## corresponderende lijst van
           ## permutatiekarakters.
       Add( p_karakters, permkarakters[i] );
    od;
 od;
 l := Length( ondergroepen );
 for i in [ 1..l ] do
    ondergroepen[i].perm := p_karakters[i];
 od;
 groep.p_karakters := p_karakters;
 groep.ondergroepen := ondergroepen;
 gezocht := [];
 Print("begin loop");
 for u in [2..(l-1)] do
    for v in [2..u] do
       gen( groep, ondergroepen[u] , ondergroepen[v] );
    od;
 od;
 lijstvanchi := Set( gezocht );
 Print("De karakters van de vorm
     X=1(H/\T)^G + 1(G) - 1(H)^G - 1(T)^G zijn: " , "\n" );
return lijstvanchi ;
end;
######################### einde langzaam #################################
```

A.1.4 Ein Programm für die Berechnung von Chi's mit der Markentafel

```
############################### m e r k ####################
## Dit  ' programma ' rekent kandidaten voor karakters van de
## vorm chi uit m.b.v. de Tables Of Marks.
merk := function( groep , permkarakters )
## Voor bepalen 'afkomst': 'restchi' toevoegen als variabele
 local tk, antwoord, lengte, a, b, lijst, chivank, merkteken,
```

```
       zeef;
 tk := TableOfMarks( groep );
 groep.permkarakters := permkarakters;
 antwoord := [];

################# m e r k t e k e n ###################
## merkteken is een functie die voor twee klassen van
## geconjugeerde ondergroepen alle chi's, die door paren van
## ondergroepen uit die klassen ( uit elke  klasse een
## ondergroep ) voortgebracht zouden kunnen worden, bepaalt.

merkteken := function ( g , klasse_h , klasse_t   )
      ## g is een groep.
      ## klasse_h en klasse_t zijn niet-triviale klassen van
      ## geconjugeerden van ondergroepen.
 local mogelijk, klassen, permg, hulp, chi, i, j;
 mogelijk := IntersectionsTom( g.tableOfMarks, klasse_h, klasse_t );
 klassen := [];
 for i in [ 1 .. Length ( mogelijk ) ] do
    if IsBound( mogelijk[ i ] ) = true then
       Add ( klassen ,  i  );
    fi;     ## Bepaald de nummers van de klassen waarin
 od;        ## H /\ T terecht kan komen.
 klassen := Filtered( klassen , n -> n <> klasse_h and n <> klasse_t );
      ## Als klasse_h = klasse_t = klasse_h/\t dan
      ## <h,t> = h < g , dus verwerp. Als, zeg,
      ## klasse_h = klasse_h/\t dan <h,t> = t < g ,dus verwerp.
 if Length( klassen ) > 0 then
    permg := g.permkarakters[ Length ( g.permkarakters ) ];
    hulp  := permg - g.permkarakters[ klasse_h ]
             - g.permkarakters[ klasse_t ];
    for j in [ 1 .. Length( klassen )] do
       chi := g.permkarakters[ klassen[j]   ] + hulp ;
       Add ( antwoord , chi );
    od;
 fi;
end;
################### einde merkteken #####################

 lengte := Length( permkarakters ) - 1 ;
 for a in [ 2 .. lengte ] do
    for b in [ 2 .. a ] do
       merkteken( groep , a , b );
    od;
 od;
 lijst := Set( antwoord );

################### z e e f  #############################
## Deze functie neemt een lijst bestaande uit lijsten van
```

```
## integers als argument en haalt daaruit alle lijsten weg
## waar negatieve getallen in voorkomen.
zeef := function( lijst )
 local resultaat, b, l, k, i;
 resultaat := [];
 for i in [ 1 .. Length ( lijst ) ] do
    b := lijst[i];
    l := Length( b ) + 1;
    k := 2;
    while k < l do
       if b[k] < 0 then
          k := 1 + l;
       else
          k := k + 1;
       fi;
    od;
    if k = l then
       Add( resultaat, b );
    fi;
 od;
 return resultaat;
end;
################## einde zeef ##############################

 chivank := zeef ( lijst );
 Print (" Kandidaten voor karakters van de vorm\n ");
 Print (" X = 1(H/\T)^G + 1(G) - 1(H)^G - 1(T)^G\n ");
 Print (" zijn: \n" ,  "\n" );
 return chivank;
 end;
#################### einde merk ###############################
```

A.1.5 Einige Prozeduren für die Zerlegung von Chi's in Monomialen

```
##################### t e s t ###############################
test := function( lijst,vector )
     ## Test kijkt of vector te schrijven is als som van
     ## niet-negatieve gehele veelvouden van vectoren uit lijst.
     ## Daar alle vectoren niet-negatieve gehele getallen
     ## bevatten hoeft het programma slechts eindig
     ## veel mogelijkheden na te gaan.
 local w, n, first, basis, zoek;
 zoek := function( w, n, first, basis )
  local i;
  if ForAll ( w , x -> x = 0 ) then
     return true;
  fi;
  if ForAny ( w , x -> x < 0 ) then
```

```
      return false;
   fi;
   for i in [ first .. n ] do
      if zoek( w - basis[i], n, i, basis ) then
         return true;
      fi;
   od;
   return false;
  end;
  lijst := Set( lijst );
  return zoek( vector, Length( lijst ), 1, Reversed( lijst) );
end;
################## einde test #############################

################### l o s o p ############################
## Deze Maple-Procedure bekijkt of een Chi te ontbinden is
## in rationale sommen van Monomialen.

with( linalg );
with(simplex);

losop := proc( monomat , chi, n  )
 local para, u, v, lengte, voorwaarde, i, verz, opl, werkbaar;
 para := linsolve( monomat, chi, 'u', 'v');
 voorwaarde := array( 1 .. n );
 for i to n do
    voorwaarde[i] := para[i] >= 0 ;
 od;
 verz := convert( voorwaarde, set );
 opl := maximize( para[1] , verz);
 werkbaar := convert( para , list );
 RETURN( subs ( opl , werkbaar ) );
end;
################### einde losop #####################
```

A.2 Beispiele

A.2.1 Herkunft der Chi's der Gruppe SL(2,3)

In diesem Beispiel wird die Herkunft aller *Chi* Charaktere der Gruppe $SL(2,3)$ gegeben.

```
######################### S L ( 2 , 3 ) ################################
### groep := sl( 2, 3 )
### orde := 24.

 H              T              H/\T           chi

3.2             3.1            1.1            Xi.6
3.3             3.1            1.1            Xi.6
3.3             3.2            1.1            Xi.6
3.4             3.1            1.1            Xi.6
3.4             3.2            1.1            Xi.6
3.4             3.3            1.1            Xi.6
4.1             3.1            1.1            Xi.3
4.1             3.2            1.1            Xi.3
4.1             3.3            1.1            Xi.3
4.1             3.4            1.1            Xi.3
4.2             3.1            1.1            Xi.3
4.2             3.2            1.1            Xi.3
4.2             3.3            1.1            Xi.3
4.2             3.4            1.1            Xi.3
4.3             3.1            1.1            Xi.3
4.3             3.2            1.1            Xi.3
4.3             3.3            1.1            Xi.3
4.3             3.4            1.1            Xi.3
5.1             3.1            1.1            Xi.7
5.1             3.3            1.1            Xi.7
5.1             3.4            1.1            Xi.7
5.1             4.1            2.1            Xi.1
5.1             4.2            2.1            Xi.1
5.1             4.3            2.1            Xi.1
5.2             3.2            1.1            Xi.7
5.2             3.3            1.1            Xi.7
5.2             3.4            1.1            Xi.7
5.2             4.1            2.1            Xi.1
5.2             4.2            2.1            Xi.1
5.2             4.3            2.1            Xi.1
5.2             5.1            2.1            Xi.5
5.3             3.1            1.1            Xi.7
5.3             3.2            1.1            Xi.7
5.3             3.4            1.1            Xi.7
5.3             4.1            2.1            Xi.1
5.3             4.2            2.1            Xi.1
5.3             4.3            2.1            Xi.1
```

5.3	5.1	2.1	Xi.5
5.3	5.2	2.1	Xi.5
5.4	3.1	1.1	Xi.7
5.4	3.2	1.1	Xi.7
5.4	3.3	1.1	Xi.7
5.4	4.1	2.1	Xi.1
5.4	4.2	2.1	Xi.1
5.4	4.3	2.1	Xi.1
5.4	5.1	2.1	Xi.5
5.4	5.2	2.1	Xi.5
5.4	5.3	2.1	Xi.5
6.1	3.1	1.1	Xi.4
6.1	3.2	1.1	Xi.4
6.1	3.3	1.1	Xi.4
6.1	3.4	1.1	Xi.4
6.1	5.1	2.1	Xi.2
6.1	5.2	2.1	Xi.2
6.1	5.3	2.1	Xi.2
6.1	5.4	2.1	Xi.2

```
lijst van ondergroepen van sl(2,3) :

Subgroup( sl, [  ] )                                                  1.1
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ] ] )            2.1
Subgroup( sl, [ [ [ 0*Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), Z(3) ] ] ] )            3.1
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), 0*Z(3) ] ] ] )            3.2
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3)^0, 0*Z(3) ], [ Z(3), Z(3)^0 ] ] ] )          3.3
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3)^0, Z(3)^0 ], [ 0*Z(3), Z(3)^0 ] ] ] )        3.4
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ],
  [ [ 0*Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), 0*Z(3) ] ] ] )                       4.1
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ],
  [ [ Z(3), Z(3) ], [ Z(3), Z(3)^0 ] ] ] )                            4.2
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ],
  [ [ Z(3)^0, Z(3) ], [ Z(3), Z(3) ] ] ] )                            4.3
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), 0*Z(3) ] ],
  [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ] ] )                          5.1
Subgroup( sl, [ [ [ 0*Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), Z(3) ] ],
  [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ] ] )                          5.2
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3)^0, 0*Z(3) ], [ Z(3), Z(3)^0 ] ],
  [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ] ] )                          5.3
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3)^0, Z(3)^0 ], [ 0*Z(3), Z(3)^0 ] ],
  [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ] ] )                          5.4
Subgroup( sl, [ [ [ Z(3), 0*Z(3) ], [ 0*Z(3), Z(3) ] ],
  [ [ 0*Z(3), Z(3)^0 ], [ Z(3), 0*Z(3) ] ],
  [ [ Z(3)^0, Z(3) ], [ Z(3), Z(3) ] ] ] )                            6.1
sl                                                                    7.1

Ondergroepenrooster  van sl :
```

```
#I  class 1, size 1, length 1
#I  class 2, size 2, length 1
#I  class 3, size 3, length 4
#I  class 4, size 4, length 3
#I  class 5, size 6, length 4
#I  class 6, size 8, length 1
#I  class 7, size 24, length 1
```

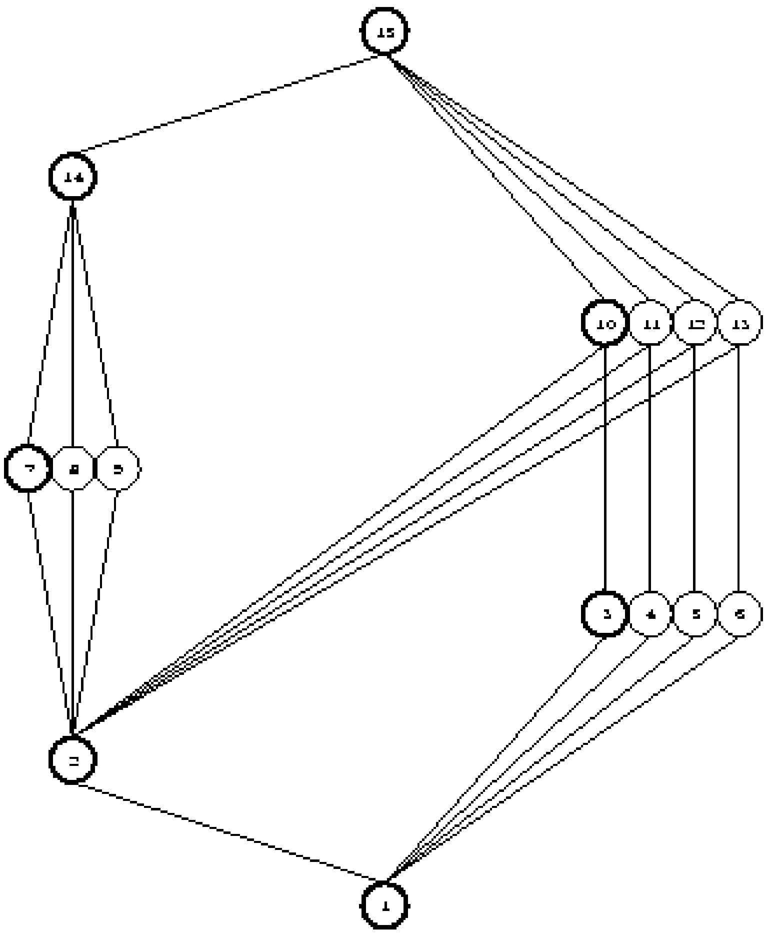


Abbildung A.1: Der Untergruppenverband der Gruppe $SL(2,3)$.

A.2.2 Das Bilden einer kurzen Permutationsdarstellung

In diesem Beispiel kann man sehen wie man eine kurze Permutationsdarstellung für e.g. $SL(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ in GAP bilden kann.

```
gap> mat :=
Group( [ [ Z(11)^9, Z(11)^3, 0*Z(11) ],
         [ Z(11)^3, Z(11)^6, 0*Z(11) ],
         [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
               [ [ Z(11)^9, Z(11), 0*Z(11) ],
                 [ Z(11)^5, Z(11)^6, 0*Z(11) ],
                 [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
       [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), Z(11)^0 ],
         [ 0*Z(11), Z(11)^0, 0*Z(11) ],
         [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
               [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), 0*Z(11) ],
                 [ 0*Z(11), Z(11)^0, Z(11)^0 ],
                 [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ] );;
gap> vektoren := GF(11)^3;; ## Geeft alle drie-dimensionale vektoren
                            ## over F11.
gap> nv := NormedVectors( vektoren ); ## Pakt uit vektoren die
     ## vektoren, die als eerste entrie een 1 hebben.
gap> op := Operation( mat, nv , OnLines );;
     ## OnLines specificeert hoe de groepselememten opereren.
     ## Hier door een vektor uit nv te vermenigvuldigen met
     ## een groepselement en door de aldus verkregen vektor te
     ## delen door de eerste niet-nul coefficient. Operation geeft
     ## een permutatiepresentatie waarvan de voortbrengers op dezelfde
     ## manier opereren op de cijfers 1..#(nv), als de voortbrengers
     ## van mat opereren op de verzameling nv.
gap> Length( op.generators);
4
gap> leeg:=[];;
gap>  for i in [1..4] do
> Add( leeg, LargestMovedPointPerm( op.generators[i]));
> od;
gap> leeg;
[ 133, 133, 133, 133 ]
gap> orb := Orbits( op , [1..133]); ## Geeft de banen
[ [ 1 ], [ 2, 57, 35, 3, 90, 101, 58, 61, 68, 36, 37, 65, 41, 4, 24, 91, 97,
      102, 109, 99, 106, 59, 64, 92, 62, 79, 112, 69, 73, 11, 77, 44, 12, 78,
      38, 96, 103, 60, 6, 72, 66, 42, 13, 25, 98, 31, 94, 105, 30, 27, 110,
      33, 93, 34, 111, 100, 107, 63, 95, 67, 26, 123, 80, 85, 113, 121, 89,
      70, 83, 117, 74, 39, 5, 87, 71, 9, 75, 40, 10, 88, 122, 76, 45, 108,
      82, 116, 104, 7, 46, 14, 20, 32, 16, 28, 43, 15, 22, 29, 18, 19, 21,
      124, 133, 128, 81, 86, 120, 126, 114, 115, 118, 127, 84, 131, 130, 125,
      8, 119, 129, 47, 49, 48, 54, 17, 50, 23, 56, 52, 53, 55, 51, 132 ] ]
gap> op2 := Operation( op , orb[2] );; ## Op de eerste baan gebeurt
```

```
                                                     ## niets...
gap> ond := Subgroup( op2,[op2.1,op2.2]);; ## ond correspondeert met
   ## SL(2,5)
gap> Size( ond );
120
gap> op3 := Operation( op2,Cosets( op2,ond),OnRight);;
     ## Cosets(op2,ond) berekent de nevenklassen van ond in op2.
     ## Operation geeft weer een permutatiegroep terug, nu degene
     ## die correspondeert met de werking van op2 op
     ## de nevenklassen
Group( (  2, 90, 34, 40, 21, 11, 85, 96, 41, 12)(  3,116, 94, 49, 20, 10, 82,
  84, 42, 13)(  4, 55, 57, 48, 19,  9, 95, 97, 43, 14)(  5, 35, 99, 47, 18,
   8,108, 80, 44, 15)(  6,120, 98, 46, 17,  7, 63, 59, 45, 16)
( 22, 38,121,104, 71, 31, 62, 56, 60, 65)( 23, 93,107,115, 70, 30, 89, 32, 86,
 33)( 24, 88,117, 92, 54, 29,118,110,113, 66)( 25,111,114,109, 69, 28,105, 83,
 37, 67)( 26, 50,106, 53, 68, 27, 81,119,112, 61)( 36,102, 87, 51,100, 79, 64,
 101,103, 91)( 39, 77, 58, 74, 78, 52, 73, 75, 76, 72), (  2, 18,112, 78, 31,
  11, 15, 53, 72, 22)(  3, 14,104, 77, 30, 10, 19, 60, 73, 23)
(  4, 21, 37, 39, 29,  9, 12,109, 52, 24)(  5, 17,115, 76, 28,  8, 16, 86, 74,
 25)(  6, 13,113, 58, 27,  7, 20, 92, 75, 26)( 32, 81, 35,103, 49,107, 50,108,
 51, 42)( 33, 66, 71, 67, 68, 70, 54, 65, 69, 61)( 34, 97, 84, 59, 99, 96, 57,
 94, 98, 80)( 36, 41, 56, 88,116, 79, 40,121,118, 82)( 38, 95,102, 47,114, 62,
 55, 64, 44, 83)( 43,110, 89, 63, 91, 48,117, 93,120,100)( 45,119,111, 85,101,
 46,106,105, 90, 87), (  1, 11, 10,  9,  8,  7,  6,  5,  4,  3,  2)
( 12, 97,104, 43, 85,118,119, 91, 77, 61, 24)( 13,121, 98, 87,115, 76, 46, 71,
 82, 27, 50)( 14, 95, 75, 94, 93, 67, 92, 83, 30, 49, 51)( 15, 41,107, 70, 96,
 108, 79, 22,109, 62, 52)( 16, 66,102,105, 44, 80, 25, 72,110, 63, 53)
( 17,112,120,117, 78, 28, 99, 47,111, 64, 54)( 18, 39, 38, 37, 31, 36, 35, 34,
 33, 32, 40)( 19,103, 42, 23,114,113, 69, 89, 84, 58, 55)( 20, 81, 26,116, 65,
 45, 74, 86,101, 59, 56)( 21, 29, 68, 73,100,106, 88, 90, 48, 60, 57),
(  1,107,114,119,110, 56,121,117,106, 83, 32)(  2, 41, 23,118, 72, 59, 13,120,
 100, 92, 33)(  3, 15, 42, 85, 25,101, 50,112, 73, 67, 34)(  4, 52,103, 43,
  80, 86, 27, 17, 68, 93, 35)(  5, 62, 19,104, 44, 74, 82, 54, 29, 94, 36)
(  6,109, 55, 97,105, 45, 71, 64, 21, 75, 31)(  7, 22, 58, 12,102, 65, 46,111,
 57, 95, 37)(  8, 79, 84, 24, 66,116, 76, 47, 60, 14, 38)(  9,108, 89, 61, 16,
 26,115, 99, 48, 51, 39)( 10, 96, 69, 77, 53, 81, 87, 28, 90, 49, 18)
( 11, 70,113, 91, 63, 20, 98, 78, 88, 30, 40) )
gap> Size( op3 );
14520
gap> op3.perfectSubgroups := [ond];;
gap> lat := Lattice( op3 );; ## Berekent het ondergroepenverband.
gap> SetPrintLevel( lat,1);;
gap> op3.name := "op3";
"op3"
gap> lat;
#I  Class number   1, Length    1, Order 1
#I  Class number   2, Length  121, Order 2
#I  Class number   3, Length 1210, Order 3
#I  Class number   4, Length 1815, Order 4
```

```
#I  Class number   5, Length  726, Order 5
#I  Class number   6, Length 1210, Order 6
#I  Class number   7, Length  605, Order 8
#I  Class number   8, Length  726, Order 10
#I  Class number   9, Length   12, Order 11
#I  Class number  10, Length 1210, Order 12
#I  Class number  11, Length  726, Order 20
#I  Class number  12, Length  132, Order 22
#I  Class number  13, Length  605, Order 24
#I  Class number  14, Length  132, Order 55
#I  Class number  15, Length  132, Order 110
#I  Class number  16, Length  121, Order 120
#I  Class number  17, Length    1, Order 121
#I  Class number  18, Length    1, Order 242
#I  Class number  19, Length   10, Order 363
#I  Class number  20, Length   15, Order 484
#I  Class number  21, Length    6, Order 605
#I  Class number  22, Length   10, Order 726
#I  Class number  23, Length    5, Order 968
#I  Class number  24, Length    6, Order 1210
#I  Class number  25, Length   10, Order 1452
#I  Class number  26, Length    6, Order 2420
#I  Class number  27, Length    5, Order 2904
#I  Class number  28, Length    1, Order 14520
Lattice( op3 )
gap> quit;
```

Literaturverzeichnis

[1] Martin Schönert et alii – GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, third edition, (1993–1994).

[2] Maple V Release 2 – University of Waterloo, (1981–1993).

[3] Burnside, W.S. – Theory of groups of finite order, Dover Publications, New York, (1955). Reprint of the first edition from 1911.

[4] Conway, J.H. et alii – ATLAS of finite groups, Clarendon Press, Oxford (1985).

[5] Djokovič, D.Z.; Malzan J. – Imprimitive irreducible complex characters of the alternating group, Can. J. Math., 28, 1199-1204 (1976).

[6] Hecke, E. – Mathematische Werke, (Papers 7,9 and 12), Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, (1959).

[7] Huppert, B. – Endliche Gruppen I, Springer Verlag, Berlin, (1967).

[8] Isaacs, I.M. – Character theory of finite groups, Acad. Press, New York, (1976).

[9] Kerber, A. – Algebraic combinatorics via finite group actions, BI-Wiss.-Verl., Mannheim, (1991).

[10] Lang, S. – Algebraic Number Theory, Addison-Wesley Publishing co., inc., Reading, Massachusetts etc. , (1970).

[11] Pfeiffer, Götz. – Von Permutationscharakteren und Markentafeln, Diplomarbeit im Fach Mathematik an der RWTH Aachen, (1991).

[12] Waall, R.W. van der; Bensaïd, A. – Non-solvable finite groups whose subgroups of equal order are conjugate, Indag.Math., 1, 397-408, (1990).

[13] Waall, R.W. van der – Finite groups whose subgroups of equal order are conjugate, Indag.Math., 4, 239-254, (1994).

[14] Waall, R.W van der; Sato, K – On a problem of R. Brauer for quotients of Dedekind–zeta–functions. Indag.Mathem., 4, 99-109, (1993).

[15] Wähling, H. – Theorie der Fastkörper, Thales Verlag, Essen, (1987).