Ergebnisse über Dedekind-Zeta-Funktionen, monomiale Charaktere und Konjugationsklassen endlicher Gruppen, unter Benutzung von GAP

Roderik C. Lindenbergh *

Robert W. van der Waall †

Zum Geleit

Vom 15. Januar bis zum 15. Juli des Jahres 1994 war der erste Autor am Lehrstuhl D für Mathematik der Rheinischen-Westfälischen Technischen Hochschule in Aachen, Deutschland. Aus seiner dortigen Tätigkeit ist diese Arbeit zum größten Teil enstanden. Direkter Anlaß zu seinem Besuch war seine Teilnahme am 'Workshop on Computational Group Theory', während des 'Groups-'93'–Kongresses in Galway, Irland, im August 1993. Dort machte er zum erstenmal mit GAP Bekanntschaft. GAP, 'Groups, Algorithms and Programming', ist ein Computeralgebrasystem, ähnlich wie MAPLE organisiert, aber speziell für das Rechnen mit Gruppen und verwandten Strukturen entworfen.

GAP besteht aus einer Programmiersprache, in der man selber Algorithmen implementieren kann, aus einer Bibliothek von GAP-Funktionen, wozu schon eine Vielzahl an Algorithmen implementiert worden ist, aus einer Datei mit Daten über Gruppen und mit Charaktertafeln, und schließlich aus

*Universiteit Utrecht, Department of Mathematics, P.O. Box 80010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands, email: lindenbe@math.ruu.nl

†Universiteit van Amsterdam, Faculteit WINS, Vakgroep Wiskunde, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, The Netherlands, email: waallr@wins.uva.nl

einem Manual von etwa 1000 Seiten. GAP wurde hauptsächlich von den Mitarbeitern und Studenten des Lehrstuhls D, unter der Leitung von Herrn Professor Dr. J. Neubüser, entwickelt.

Der zweite Autor hat dem ersten Autor einige Probleme im Bereich der Gruppen– und Darstellungstheorie gestellt, wofür es zweckmäßig schien, GAP zu benützen. Nach Beurteilung dieser Probleme in Aachen, konnte der erste Autor dort Mitte Januar 1994 anfangen.

Das erste Problem bezieht sich auf die Frage, ob ein spezieller Charakter, Chi, auf eine besondere Art und Weise in monomiale Charaktere zerlegbar ist. Dieses Problem hat seinen Ursprung in einem Problem von R. Brauer über Quotienten von Dedekind-Zeta-Funktionen. Zu dieser Frage hat er einige Prozeduren geschrieben, unter anderem für das Bestimmen aller monomialen und Chi Charaktere einer Gruppe. Auch hat er die Theorie der Markentafeln studiert und auf dieses Problem angewendet. Nach der Entwicklung der Prozeduren war er imstande, alte und neue Beispiele vollständig durchzurechnen.

Beim zweiten Problem geht es um die Herkunft irreduzibler Charaktere gewisser einfacher Gruppen. Mit Hilfe des 'Atlas of Finite Groups', [**3**], und einiger GAP-Funktionen sind die ersten neunzehn Gruppen aus dem Atlas auf die MP-Eigenschaft getestet. Eine Gruppe liegt innerhalb der Klasse MP, wenn alle nicht-linearen irreduziblen Charaktere entweder monomial oder primitiv sind. So gibt es gewisse alternierenden Gruppen A_m, mit m gerade, $m > 4$, die einen nicht-linearen nicht-primitiven irreduziblen Charakter besitzen.

Im letzten Kapitel wird für jede von zehn sogenannten Ausnahmegruppen untersucht, ob alle Untergruppen gleicher Ordnung einer solchen Gruppe zu einander konjugiert sind. Mit GAP ist das für fünf Gruppen geklärt. Der zweite Autor hat darauf einen theoretischen Beweis erbracht, in dem gezeigt wird, daß die nicht-auflösbaren unten den zehn Gruppen die obige Eigenschaft erfüllen.

Der erste Autor ist Herrn Professor Dr. J. Neubüser großen Dank schuldig, der seinen Aufenthalt in Aachen ermöglicht hat, und an Herrn Thomas Breuer, der immer für Fragen zur Verfügung gestanden und ihm viele 'Tricks' zum Benutzen von GAP und dem ATLAS gezeigt hat. Es war auch Herr Breuer, der ihn mit *Group Characters* versehen hat, implementiert in GAP–3.4. Ausserdem bedankt er sich bei den Herren Andreas Hoppe, Dr. Klaus Lux, Martin Schönert und Elmar Wings, die alle geholfen haben.

Bezeichnungen

Es sei vorausgesetzt, daß alle Gruppen in dieser Arbeit endlich sind, und alle zu betrachtenden einfachen Gruppen nichtabelsch. Gruppentheoretische Objekte sind meistens wie in Huppert [**6**] und Isaacs [**7**], und wie im ATLAS [**3**] notiert. Für uns wichtige Teile der Charaktertafeln sind wie in GAP notiert. Auf den ersten Zeilen einer Charaktertafel sind die Ordnungen der Zentralisatoren gegeben. Zweitens folgt eine Zeile mit den Namen der Konjugationsklassen, gefolgt von den Charakteren. Falls wichtig werden in der letzten Zeile Abkürzungen für nicht-rationale Eingaben erklärt, wobei die letzte Eingabe immer der Notation im ATLAS [**3**] entspricht.

Mit $A.B$ wird im allgemeinen jede Gruppe G bezeichnet, in der A ein Normalteiler von G ist, und die Faktorgruppe $G/A \cong B$ ist. Man nennt die Gruppe $A.B$ *zerfallend* wenn sie ein semidirektes Produkt von A mit B ist. Zur Notation setzen wir $A : B$ oder $B \ltimes A$. Ein direktes Produkt von b Kopien von zyklischen Gruppen der Ordnung a bezeichnen wir mit a^b.

Jetzt betrachten wir eine Reihe von Begriffen.

$U \underset{G}{\backsim} V$	—	die Untergruppen U und V von G sind zu einander in G konjugiert, d.h. es gibt $a \in G$ mit $a^{-1}Ua = V$;
$\|G\|$	—	die Ordnung von G;
$\|G : H\|$	—	die Index der Untergruppe H von G;
Z_n, C_n	—	eine zyklische Gruppe der Ordnung n;
$\|g\|$	—	die Ordnung des Elements g;
$Z(G), \zeta(G)$	—	das Zentrum von G;
$[G, G], G'$	—	die Kommutatoruntergruppe von G;
$p \mid n$	—	die Primzahl p teilt die ganze Zahl n;
$p \nmid n$	—	die ganze Zahl n ist nicht teilbar durch die Primzahl p;
$p^k \\| n$	—	für $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und Primzahl p ist die ganze Zahl n teilbar durch p^k, aber nicht teilbar durch p^{k+1};
$P\mathrm{Aut}(G)$	—	die Gruppe aller Potenzautomorphismen von G, d.h. $P\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) \mid t^\alpha = t^{i_\alpha},\ \forall t \in G\}$; es sei betont, daß $i_\alpha \in \mathbb{Z}$ nur von α abhängt;
π	—	eine nicht-leere Primzahlmenge;

M eine (Hall)–π–Untergruppe von G

— ($p \nmid |G:M|$ für jede Primzahl $p \in \pi$ und) jede Primzahl q die $|M|$ teilt hat die Eigenschaft $q \in \pi$;

$M(n,q)$ — die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{F}_q$;

$\mathrm{GL}(n,q)$ — $M(n,q) \setminus \{A \in M(n,q) \mid \det(A) = 0\}$;

$\mathrm{SL}(n,q)$ — $\mathrm{GL}(n,q) \setminus \{A \in \mathrm{GL}(n,q) \mid \det(A) \neq 1\}$;

$\mathrm{PSL}(n,q)$, $L(n,q)$, $L_n(q)$

— $\mathrm{SL}(n,q)/\zeta(\mathrm{SL}(n,q))$;

S_n — die symmetrische Gruppe auf n Symbolen;

A_n — $S_n \setminus$ {ungerade Permutationen};

$\mathrm{CHAR}(G)$ — die (unendliche) Menge der komplexen Charaktere von G;

$\mathrm{IRR}(G)$ — $\{\chi \in \mathrm{CHAR}(G) \mid \chi \text{ irreduzibel}\}$;

$\mathrm{LIN}(G)$ — $\{\chi \in \mathrm{CHAR}(G) \mid \mathrm{Grad}(\chi) = 1\}$;

$\mathbf{1}_G$ — der triviale Charakter von G, d.h. $\mathbf{1}_G(g) = 1$ für jedes $g \in G$;

τ monomial in G, oder τ ein monomialer Charakter von G — es gibt $H \leq G$ und $\lambda \in \mathrm{LIN(H)}$ sodaß für den hochinduzierten Charakter λ^G gilt daß $\lambda^G = \tau$;

$\mathrm{MON}(G)$ — $\{\chi \in \mathrm{CHAR}(G) \mid \chi \text{ monomial in } G\}$;

τ Permutationscharakter von G

— es gibt $H \leq G$ mit $\left(\mathbf{1}_H\right)^G = \tau$;

Im Folgendem sei η immer ein Charakter der Gruppe G.

$\eta \in \mathrm{MON}$–$\mathbb{Q}$ — Es gibt mindestens einen Ausdruck $\eta = \sum_i a_i\mu_i$, mit jedem $\mu_i \in \mathrm{MON}(G)$, und alle a_i sind nichtnegative rationale Zahlen;

$\eta \in \mathrm{MON}$–$\mathbb{N}$ — Es gibt mindestens einen Ausdruck $\eta = \sum_i n_i\mu_i$, mit jedem $\mu_i \in \mathrm{MON}(G)$, und alle n_i sind nichtnegative ganze Zahlen.

Zum Rechnen mit Gruppencharakteren ist es angebracht, ein sogenanntes Erzeugendensystem C von monomialen Charakteren (einer Gruppe G) zu betrachten; wir schreiben $C \in GSM$. Dies soll bedeuten, daß es bei jedem vorgegebenen $\mu \in \mathrm{MON}(G) \setminus \{\mathbf{1}_G\}$ nicht-negative ganze Zahlen n_i gibt derart, daß $\mu = \sum_{i=1}^{t} n_i \gamma_i$ mit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\} = C$ und $t = \#C$. (Es ist klar, daß die natürliche Zahl t von der Vorgabe von C abhängt).

$\eta \in \mathrm{MON} - \mathbb{Q} - C$ — $C \in GSM$ und es gibt mindestens einen Ausdruck $\eta = \sum_{i=1}^{t} m_i \gamma_i$, wobei $C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ mit $\#C = t$ und wobei alle m_i nicht-negative rationale Zahlen sind;

$\eta \in \mathrm{MON} - \mathbb{N} - C$ — $C \in GSM$ und es gibt mindestens einen Ausdruck $\eta = \sum_{i=1}^{t} c_i \gamma_i$, wobei $C = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ mit $\#C = t$ und wobei alle c_i nicht-negative ganze Zahlen sind.

1 Die Zerlegung von Chi in monomiale Charaktere

1.1 Das Brauersche Problem

Zu einem Zahlkörper K kann man die sogenannte Dedekind-Zeta-Funktion zuordnen. Es sei $\wp$ ein Ideal von K, und p eine Primzahl in $\mathbb{Q}$, mit $\wp \mid p$. Es sei $\mathbb{N}\wp := p^{f_\wp}$ wobei $f_\wp$ den Grad von $\wp$ bedeutet, und $s \in \mathbb{C}$. Dann wird die Dedekind-Zeta-Funktion $\zeta_K(s)$ von K für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ definiert durch

$$\zeta_K(s) := \prod_{\wp} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathbb{N}\wp^s}}.$$

Nach Hecke [**5**] kann $\zeta_K(s)$ analytisch erweitert werden in $\mathbb{C}$, mit Ausnahme genau eines Pols im Punkt $s = 1$. Wenn zwei Zahlkörper K und M vorgegeben sind, so kann man definieren

$$\zeta_{K,M}(s) := \frac{\zeta_{KM}(s) \cdot \zeta_{K \cap M}(s)}{\zeta_K(s) \cdot \zeta_M(s)}.$$

R. Brauer [**2**] stellte sich die Frage, ob $\zeta_{K,M}$ eine ganze Funktion sei (in $\mathbb{C}$). Falls dies zutrifft, so sagen wir, daß das Brauersche Problem eine positive Antwort hat (für K und M). Vereinfacht können wir behaupten, daß die den Erweiterungen entsprechenden Galoisgruppen einen Zugang zu diesem Problem liefern. Von diesen Galoisgruppen können wir die Darstellungen und die Charaktere betrachten. Die Theorie der Artin-L-Reihen ergibt eine Verbindung zwischen den Charakteren der Galoisgruppen und den Dedekind-Zeta-Funktionen der beteiligten Zahlkörper. Beweise und weitere Details über die Theorie der Artin-L-Reihen findet man etwa in [**8**].

Betrachte nun eine galoissche Erweiterung U/V, mit Galoisgruppe R. Wichtige Eigenschaften der Artinschen L-Reihen sind

1. $L(s, \mathbf{1}_R, U/V) = \zeta_V(s)$
2. $L(s, \chi_1 + \chi_2, U/V) = L(s, \chi_1, U/V) \cdot L(s, \chi_2, U/V)$, mit $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{CHAR}(R)$
3. Es sei F ein Zwischenkörper $V \subset F \subset U$ und $\psi \in \mathrm{CHAR}(\mathrm{Gal}(U/F))$. Dann gilt $L(s, \psi, U/F) = L(s, \psi^R, U/V)$.

Seien nun zwei Zwischenkörper E und F von U/V mit zugehörigen Untergruppen $H = \mathrm{Gal}(U/E)$ und $T = \mathrm{Gal}(U/F)$ von R gegeben. Dann ergibt sich aus obigen Eigenschaften, daß

$$\begin{aligned}
\zeta_{E,F} &= \frac{\zeta_{EF}.\zeta_{E\cap F}}{\zeta_E.\zeta_F}\\
&= \frac{L(s,1_{H\cap T},U/EF).L(s,1_{<H,T>},U/E\cap F)}{L(s,\mathbf{1}_H,U/E).L(S,\mathbf{1}_T,U/F)}\\
&= L(s,(\mathbf{1}_{H\cap T}^{\langle H,T\rangle}+\mathbf{1}_{<H,T>}-\mathbf{1}_H^{<H,T>}-\mathbf{1}_T^{<H,T>},U/E\cap F).
\end{aligned}$$

Dementsprechend definieren wir die Klassenfunktion $Chi(C,D)$ für Untergruppen C und D einer Gruppe G.

Definition 1.1.1
$Chi(C,D) := (\mathbf{1}_{C\cap D})^{\langle C,D\rangle} + \mathbf{1}_{\langle C,D\rangle} - (\mathbf{1}_C)^{\langle C,D\rangle} - (\mathbf{1}_D)^{\langle C,D\rangle}$.

Es ist bekannt, daß die Artin-L-Reihe eines monomialen Charakters μ von $\langle H,T\rangle$ eine ganze Funktion ist, falls μ den trivialen Charakter der Gruppe $\langle H,T\rangle$ nicht als irreduziblen Konstituenten enthält. Wenn wir also für einen $Chi = Chi(H,T)$ zeigen können, daß

$$Chi = \sum_i a_i\mu_i, \quad a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \mu_i \in \mathrm{MON}(\langle H,T\rangle),$$

dann erhalten wir, daß die dem Chi entsprechende Artinsche L-Funktion holomorph ist. Zur “Meromorphie” Eigenschaft sei auch auf [**1**] verwiesen. Ab jetzt werden wir immer eine feste Gruppe G und alle zugehörigen Chi-Klassenfunktionen betrachten. Das heißt, wir werden in Definition 1.1.1 immer die Lage betrachten wo $\langle C,D\rangle = G$, und dann die zugehörige Chi-Klassenfunktion $Chi = Chi(C,D)$ bilden. Man kann eben zeigen, daß Chi tatsächlich ein Charakter von G ist. Dazu brauchen wir einen Satz von R. Brauer:

Satz 1.1.2 (R. Brauer)
Es sei $\chi \in \mathrm{CHAR}(G)$ mit $[\chi, \mathbf{1}_G] = 0$. Seien A und B zwei Untergruppen von G derart, daß

$$[\chi_A, \mathbf{1}_A] + [\chi_B, \mathbf{1}_B] > [\chi_{A\cap B}, \mathbf{1}_{A\cap B}].$$

Dann erzeugen A und B eine echte Untergruppe von G, d.h. $\langle A,B\rangle \neq G$.

Beweis
Man vergleiche ([**7**], Theorem 5.19). ||

Folgerung 1.1.3
$Chi = Chi(H,T)$ ist ein Charakter von $G = \langle H,T\rangle$.

Beweis
Sei $A \leq G$. Aus dem Frobeniusschen Reziprozitätsatz sieht man gleich, daß $\mathbf{1}_G$ genau einmal vorkommt in der Zerlegung von $(\mathbf{1}_A)^G$ in irreduzible Komponenten:

$$[(\mathbf{1}_A)^G,\, \mathbf{1}_G] = [\mathbf{1}_A,\, (\mathbf{1}_G)_A] = [\mathbf{1}_A,\, \mathbf{1}_A] = 1.$$

Es folgt also, daß $[Chi,\, \mathbf{1}_G] = 0$. Chi ist ein Charakter genau dann, falls

$$[(\mathbf{1}_{H\cap T})^G,\, \chi_i] \geq [(\mathbf{1}_H)^G + (\mathbf{1}_T)^G,\, \chi_i]$$

für alle $\chi_i \in \mathrm{IRR}(G), \chi_i \neq \mathbf{1}_G$. Da wir vorausgesetzt haben, daß H und T die ganze Gruppe G erzeugen und $\mathbf{1}_G$ nicht in Chi vorkommt, können wir den Brauerschen Satz 1.1.3 umgekehrt auf jeden Charakter χ_i anwenden, und wir sehen, daß

$$\begin{array}{rcl} \left[(\mathbf{1}_{H\cap T})^G, \chi_i\right] & = & \left[(\chi_i)_{H\cap T}, \mathbf{1}_{H\cap T}\right] \\ & \geq & \left[(\chi_i)_H, \mathbf{1}_H\right] + \left[(\chi_i)_T, \mathbf{1}_T\right] \\ & = & \left[(\mathbf{1}_H)^G, \chi_i\right] + \left[(\mathbf{1}_T)^G, \chi_i\right], \end{array}$$

zutrifft. ‖

Wir haben oben schon bemerkt, daß das Brauersche Problem eine positive Antwort hat für zwei Untergruppen H und T, welche die ganze Gruppe G erzeugen, falls $Chi = Chi(H,T)$ eine Zerlegung hat wie

$$Chi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \quad a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \mu_i \in \mathrm{MON}(G);$$

d.h. $Chi \in \mathrm{MON}-\mathbb{Q}$. Ebenso, wenn alle a_i in $\mathbb{N}_{\geq 0}$ enthalten sind, so erhalten wir offenbar $Chi \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$.

In [**12**] haben R.W. van der Waall und K. Sato bewiesen:

- Sei G eine auflösbare Gruppe, $H,T \leq G, G \neq H,\ G \neq T,\ G = HT$. Dann gilt $Chi(H,T) \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$.
- Sei G eine auflösbare Gruppe. Seien H und T zwei maximale Untergruppen von G. Dann gilt $Chi(H,T) \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$.

Sie haben aber auch gezeigt, daß es Gruppen G gibt, auflösbare und nicht-auflösbare, mit $H, T \leq G$ so, daß $G = \langle H, T\rangle$ wofür $Chi(H,T) \in \text{MON} - \mathbb{Q}$ nicht zutrifft. Sie haben solche Beispiele gefunden in $\text{SL}(2,3)$, A_5 und $\text{GL}(2,3)$. In diesen Fällen gibt es aber nur sehr wenig verschiedene Chi wofür $Chi \in \text{MON}-\mathbb{Q}$ nicht zutrifft. Deshalb ist es interessant zu sehen, was bei ähnlichen, etwas größeren Gruppen geschieht. In diesem Kapitel werden wir uns weiterhin beschäftigen mit dem Nachprüfen obiger Gruppen und außerdem betrachten, was in den Gruppen 48.50, $\text{GL}(3,2)$ und A_6 passiert. Dazu sind Prozeduren für GAP geschrieben worden und die Zerlegung der sämtlichen Chi in monomiale Charaktere wird im Anhang angegeben. Zu den inneren Berechnungen seien noch zwei Lemmata und ein Satz erwähnt; die Beweise sind leicht.

Lemma 1.1.4
Es sei $\chi \in \text{CHAR}(G) \setminus \{\mathbf{1_G}\}$. Dann sind gleichwertig:

1. $\chi \in \text{MON} - \mathbb{Q}$;
2. für jedes $C \in GSM$ gilt $\chi \in \text{MON} - \mathbb{Q} - C$;
3. für wenigstens ein $C \in GSM$ trifft $\chi \in \text{MON} - \mathbb{Q} - C$ zu.

Lemma 1.1.5
Es sei $\chi \in \text{CHAR}(G) \setminus \{\mathbf{1_G}\}$. Dann sind gleichwertig:

1. $\chi \in \text{MON} - \mathbb{N}$;
2. für jedes $C \in GSM$ gilt $\chi \in \text{MON} - \mathbb{N} - C$;
3. für wenigstens ein $C \in GSM$ trifft $\chi \in \text{MON} - \mathbb{N} - C$ zu.

Mit Hilfe der obigen Lemmata folgt dann der wichtige Satz 1.1.6.

Satz 1.1.6
Es sei $\chi \in \text{CHAR}(G) \setminus \{\mathbf{1_G}\}$. Dann sind gleichwertig:

1. $\chi \in \text{MON} - \mathbb{Q}$ aber $\chi \in \text{MON} - \mathbb{N}$ ist nicht wahr;
2. es gibt wenigstens ein $C \in GSM$ wofür $\chi \in \text{MON} - \mathbb{Q} - C$ erfüllt sei aber wofür zu gleicher Zeit $\chi \in \text{MON} - \mathbb{N} - C$ nicht zutrifft.

1.2 Die alten Beispiele

1.2.1 SL(2.3)

Die Charaktertafel von SL(2, 3) ist:

	2	3	1	1	1	2	3	1
	3	1	1	1	1	.	1	1
		1a	3a	3b	6a	4a	2a	6b
χ_1		1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	A	/A	/A	1	1	A
χ_3		1	/A	A	A	1	1	/A
χ_4		2	-1	-1	1	.	-2	1
χ_5		2	-A	-/A	/A	.	-2	A
χ_6		2	-/A	-A	A	.	-2	/A
χ_7		3	.	.	.	-1	3	.

$$A = \zeta_3^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -1 - b3$$

Die nächste Menge $\{\mu_1, \ldots, \mu_7\}$ ist ein Beispiel einer erzeugenden Menge monomialer Charaktere, d.h. $\{\mu_1, \ldots, \mu_7\} \in GSM$.

$$\begin{array}{lcl}
\mu_1 & = & [0,0,0,0,0,0,1] \\
\mu_2 & = & [0,0,0,0,1,1,0] \\
\mu_3 & = & [0,0,0,1,0,1,0] \\
\mu_4 & = & [0,0,0,1,1,0,0] \\
\mu_5 & = & [0,0,0,1,1,1,0] \\
\mu_6 & = & [0,0,1,0,0,0,0] \\
\mu_7 & = & [0,1,0,0,0,0,0]
\end{array}$$

Zur Erläuterung obiger Schreibweise sei gesagt, daß $\mu_4 = \chi_4 + \chi_5$, usw..

Die nächste Tabelle enthält die insgesamt 7 Chi's. Rechts steht immer eine Zerlegung in erzeugende monomiale Charaktere, gegeben durch den Koeffizientenvektor, das heißt, wenn $Chi = c_1 \star \mu_1 + \cdots + c_7 \star \mu_7$, dann findet man in der Zerlegungsspalte den Vektor $[c_1, \ldots, c_7]$.

n^o	Chi	Zerlegung in $\{\mu_i\}$
Chi_1	[0,0,0,0,0,0,1]	[1,0,0,0,0,0,0]
Chi_2	[0,0,0,0,0,0,2]	[2,0,0,0,0,0,0]
Chi_3	[0,0,0,2,1,1,1]	[1,0,1,1,0,0,0]
Chi_4	[0,0,0,2,1,1,2]	[2,0,1,1,0,0,0]
Chi_5	[0,1,1,0,0,0,1]	[1,0,0,0,0,1,1]
Chi_6	[0,1,1,2,0,0,1]	[1,v-2,v,v,-2v+2,1,1]
Chi_7	[0,1,1,2,1,1,1]	[1,0,1,1,0,1,1]

Wenn für einen gewissen Chi die gewünschte Zerlegung über $\mathbb{N}_{\geq 0}$ nicht existiert, so bekommen wir eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Aus dieser Parameterdarstellung kann man leicht sehen, daß es in der Tat keine gewünschte Lösung gibt bei Chi_6. Bemerke, daß wir vorausgesetzt haben, daß alle $c_i \geq 0$ sind. Nehmen wir an, es gebe trotzdem eine Lösung; dann ist $c_2 = v - 2$, das heißt $v \geq 2$. Andererseits $c_5 = -2v + 2$, das heißt $v \leq 1$, Widerspruch.

Es stellt sich heraus, daß Chi_6 genau dann Untergruppen H und T entspricht, wenn H und T zwei verschiedene Untergruppen von Ordnung 3 sind.

1.2.2 GL(2, 3)

Die Charaktertafel von GL(2, 3) ist:

	2	4	2	1	3	1	3	3	4
	3	1	0	1	0	1	0	0	1
		1a	2a	3a	8a	6a	8b	4a	2b
χ_1		1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	-1	1	-1	1	-1	1	1
χ_3		2	·	-1	·	-1	·	2	2
χ_4		2	·	-1	A	1	-A	·	-2
χ_5		2	·	-1	-A	1	A	·	-2
χ_6		3	-1	·	1	·	1	-1	3
χ_7		3	1	·	-1	·	-1	-1	3
χ_8		4	·	1	·	-1	·	·	-4

$$A = \zeta_8 + \zeta_8^3 = \sqrt{-2} = i2$$

In diesem Fall haben wir mit insgesamt 46 verschiedenen Chi Charakteren zu tun, von denen 44 in MON − ℕ enthalten sind, und zwei ausserhalb MON − ℚ liegen. Die zwei nicht zu zerlegenden *Chi* Charaktere sind:

$$\begin{aligned} Chi_{16} &:= [0,0,1,1,1,1,0,0] \\ Chi_{25} &:= [0,0,2,2,2,2,1,1] \end{aligned}$$

Man kann Chi_{16} auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen erhalten: Erstens aus einer nichtzentralen Untergruppe der Ordnung 2 und aus einer Untergruppe der Ordnung 3, zum Beispiel

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

zweitens aus zwei beliebigen nicht konjugierten Untergruppen isomorph zu S_3. Chi_{25} läßt sich herstellen, indem man eine zur S_3 isomorphe Untergruppe H nimmt, zusammen mit einer Untergruppe T der Ordnung 3 wobei $T \not\leq H$.

Die Menge $\{\mu_1, \ldots, \mu_8\}$ ist in GSM enthalten für:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [0,0,0,0,0,0,0,1] \\ \mu_2 &= [0,0,0,0,0,0,1,0] \\ \mu_3 &= [0,0,0,0,0,1,0,0] \\ \mu_4 &= [0,0,0,0,1,0,0,1] \\ \mu_5 &= [0,0,0,1,0,0,0,1] \\ \mu_6 &= [0,0,0,1,1,0,0,1] \\ \mu_7 &= [0,0,1,0,0,0,0,0] \\ \mu_8 &= [0,1,0,0,0,0,0,0] \end{aligned}$$

Es heißt wiederum, daß $\mu_6 = \chi_4 + \chi_5 + \chi_8$, usw. Man bekommt als Parameterdarstellung für die Zerlegung von Chi_{16} in die oben erwähnten erzeugenden monomialen Charaktere

$$[v-2, 0, 1, -v+1, -v+1, v, 1, 0]$$

und diese Parameterdarstellung steht im Widerspruch mit der Nicht-Negativität der c_i. Für die Zerlegung von Chi_{25} findet man

$$[w-3, 1, 2, -w+2, -w+2, w, 2, 0]$$

und auch hier erhalten wir, daß c_1 und c_4 nicht zugleich nicht-negativ sein können. Es sei vermerkt, daß in [**12**] in ‘example 9’ nur von einem *Chi* die Rede war, und daß Chi_{25} offenbar übersehen worden ist.

1.2.3 A_5

Die Charaktertafel von A_5 ist:

	2	2	2	·	·	·
	3	1	·	1	·	·
	5	1	·	·	1	1
		1a	2a	3a	5a	5b
χ_1		1	1	1	1	1
χ_2		3	-1	·	A	$^*A$
χ_3		3	-1	·	$^*A$	A
χ_4		4	·	1	-1	-1
χ_5		5	1	-1	·	·

$$A = -\zeta_5^2 - \zeta_5^3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + b5$$

Wenn eine Untergruppe der Ordnung 5 und eine Untergruppe der Ordnung 2 die ganze A_5 erzeugen (was z.B. passiert für $H_1 = \langle((1,2,3,4,5)\rangle$ und $T_1 = \langle(2,3)(4,5)\rangle\rangle$ oder wenn man zwei beliebige Untergruppen der Ordnung 10 nimmt als H_2 und T_2, so bekommt man

$$Chi_8 := [0,1,1,2,1].$$

Bei der Menge $\{\mu_1,\ldots,\mu_5\} \in GSM$ mit

$$\begin{array}{lcl} \mu_1 & = & [0,0,0,0,1] \\ \mu_2 & = & [0,0,1,1,1] \\ \mu_3 & = & [0,1,0,1,1] \\ \mu_4 & = & [0,1,1,0,0] \\ \mu_5 & = & [0,1,1,1,0] \end{array}$$

findet man als Parameterdarstellung des Lösungsraums für die Zerlegung von Chi_8 in derjenigen $\mu_1,\ldots,\mu_5$

$$[-1-2u, u+1, u+1, u, -2u].$$

Wenn $Chi_8 \in \mathrm{MON} - \mathbb{Q}$ sein sollte, so würde es ergeben (von der Betrachtung der c_4 und c_5 in $Chi_8 = \sum_i c_i\mu_i$ her), daß $u = 0$, das heißt $c_1 = -1$. Widerspruch.

Ebenda findet man für

$$Chi_{10} := [0,1,1,4,3],$$

(wobei Chi_{10} mit Hilfe von zwei beliebigen verschiedenen Untergruppen der Ordnung 5 gebildet wird) die entsprechende Parameterdarstellung

$$[-2v+3, v, v, v-3, -2v+4].$$

Auch hier ist es klar, daß wenigstens eines der c_i negativ sein muß.

Den letzten Chi Charakter, für denen $Chi \in \mathrm{MON}-\mathbb{Q}$ nicht zutrifft, erhält man, wenn man eine Untergruppe H_1 der Ordnung 10 zusammen mit einer Untergruppe T_1 der Ordnung 5 nimmt, wobei $T_1 \not\leq H_1$, daß

$$\begin{aligned} Chi_{21} &:= [0{,}2{,}2{,}4{,}3] \\ &= (3-2w)\mu_1 + w\mu_2 + w\mu_3 + (w-2)\mu_4 + (4-2w)\mu_5, \end{aligned}$$

und es gibt keine $w \in \mathbb{Q}$, so daß die c_i in $\mathbb{Q} \geq 0$ liegen. Außer Chi_8, Chi_{10} und Chi_{21} befriedigen die (übrigen) 21 Chi die Bedingung $Chi \in \mathrm{MON}-\mathbb{N}$.

In [**12**] wird in 'example 8' und in der Schlußfolgerung am Ende von 'example 9' nur über Chi_{10} gesprochen, wo es aber faktisch drei Chi gibt, die nicht in $\mathrm{MON}-\mathbb{Q}$ enthalten sind.

Wir haben gesehen, daß man in den obigen drei Beispielen keine Lösung für das Brauersche Problem der Zerlegung aller Chi Charaktere dieser Gruppen erlangen kann. Es gibt aber nur sehr wenige Chi wobei es schief geht. Auch gibt es bis jetzt noch kein Beispiel eines Chi mit $Chi \in \mathrm{MON}-\mathbb{Q}$ und auch $Chi \notin \mathrm{MON}-\mathbb{N}$. Deshalb wird in den nächsten Abschnitten betrachtet, was bei der Gruppe 48.50 geschieht, (die Gruppe 48.50 ist eine auflösbare Gruppe der Ordnung 48, deren irreduzible Charaktere nicht alle monomial sind; die Gruppe 48.50 ist zur Gruppe $\mathrm{GL}(2,3)$ isoklin (sehe dazu [**9**])) und was bei den einfachen Gruppen $\mathrm{GL}(3,2)$ und A_6 passiert.

1.3 Die Gruppe 48.50

Oben haben wir die Gruppe $\mathrm{GL}(2,3)$ betrachtet. Man kann diese Gruppe auch beschreiben als ein semi-direktes Produkt $S_3 \ltimes Q$, wobei Q die Quaternionengruppe der Ordnung 8 ist; man beachte, daß $Q \triangleleft \mathrm{GL}(2,3)$. Es gibt aber auch eine nicht-zerfallende Erweiterung von Q der Ordnung 48; diese wird in GAP als Solvable Group (48.50) konstruiert; diese Gruppe heiße K. Eine Präsentierung von K wird gegeben von $\langle M_1, M_2, M_3\rangle$, wo $\mathrm{SL}(2,3) = \langle \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2\rangle$ und $M_3^4 = I$ mit $\mathrm{Det}(\mathrm{M}_3) = -1$. Genauer, $K = \langle M_1, M_2, M_3\rangle$ mit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

und mit $\alpha^2 = -1$.

Die Charaktertafel von K ist

	2	4	1	1	3	2	3	3	4
	3	1	1	1	·	·	·	·	1
		1a	3a	6a	4a	4b	8a	8b	2a
χ_1		1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2		1	1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_3		2	-1	-1	2	·	·	·	2
χ_4		2	-1	1	·	·	A	-A	-2
χ_5		2	-1	1	·	·	-A	A	-2
χ_6		3	·	·	-1	1	-1	-1	3
χ_7		3	·	·	-1	-1	1	1	3
χ_8		4	1	-1	·	·	·	·	-4

$$A = -\zeta_8 + \zeta_8^3 = -\sqrt{2} = -r2$$

Mit unserem Programm für das Berechnen der monomialen Charaktere einer Gruppe erhält man, daß alle irreduziblen Charaktere von K monomial sind mit Ausnahme von χ_4 und χ_5. In K existieren insgesamt 27 verschiedene Chi und es ergibt sich, daß immer $Chi \in \mathrm{MON}-\mathbb{N}$ zutrifft, im Gegensatz zur Lage in $\mathrm{GL}(2,3)$. Denn dort haben wir gesehen, daß es zwei Chi gibt, welche eben nicht in $\mathrm{MON}-\mathbb{Q}$ enthalten sind. Eine 'Erklärung' könnte man suchen im Folgenden. Wenn man die Untergruppenverbände von $\mathrm{GL}(2,3)$ und K betrachtet, so sieht man erstens, daß der Verband von K im Verband von $\mathrm{GL}(2,3)$ 'enthalten' ist, und zweitens, daß die soeben erwähnten Chi_{16} und Chi_{25} aus $\mathrm{GL}(2,3)$ nur konstruierbar sind mit Hilfe des Teils des Verbands von $\mathrm{GL}(2,3)$, der nicht in K auftritt. Man braucht nämlich dazu unbedingt eine zur S_3 isomorphe Untergruppe oder eine nicht-zentrale Untergruppe der Ordnung 2, und diese Gruppen existieren nicht in K.

1.4 GL(3, 2)

Die Gruppe GL(3, 2) ist bis auf Isomorphie die einzige einfache Gruppe der Ordnung 168. Die Charaktertafel von GL(3, 2) ist

	2	3	3	·	2	·	·
	3	1	·	1	·	·	·
	7	1	·	·	·	1	1
		1a	2a	3a	4a	7a	7b
χ_1		1	1	1	1	1	1
χ_2		3	-1	·	1	A	/A
χ_3		3	-1	·	1	/A	A
χ_4		6	2	·	·	-1	-1
χ_5		7	-1	1	-1	·	·
χ_6		8	·	-1	·	1	1

$$A = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6 = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2} = -1 - b7$$

Hier existieren 57 verschiedene *Chi* und davon sind sechs *Chi* nicht in MON $-\ \mathbb{Q}$ enthalten. Alle sonstigen *Chi* sind in MON $-\ \mathbb{N}$ enthalten. Es existiert $\{\mu_1, \ldots, \mu_6\} \in GSM$:

$$\begin{array}{lcl} \mu_1 & = & [0,0,0,0,0,1] \\ \mu_2 & = & [0,0,0,0,1,0] \\ \mu_3 & = & [0,0,0,1,0,1] \\ \mu_4 & = & [0,0,1,1,1,1] \\ \mu_5 & = & [0,1,0,1,1,1] \\ \mu_6 & = & [0,1,1,0,1,1] \end{array}$$

In der nächsten Tafel stehen die 'Verbrecher' mit ihrer Parameterdarstellung, und in der letzen Spalte stehen immer zutreffende Koeffizienten, aus denen man wie oben schnell schließen kann, daß diese Charaktere tatsächlich nicht in MON $-\ \mathbb{Q}$ enthalten sind.

n^o	*Chi*	Parameterdarstellung	Koeffizienten
Chi_{15}	[0,1,1,2,1,2]	[-v,v-1,2v,-v+1,-v+1,v]	c_1, c_6, c_2
Chi_{25}	[0,2,2,2,3,2]	[-v,v-1,2v-2,-v+2,-v+2,v]	c_1, c_6, c_2
Chi_{35}	[0,2,2,4,3,4]	[-v-1,v,2v+2,-v+1,-v+1,v+1]	c_2, c_1
Chi_{45}	[0,3,3,3,5,4]	[-v,v,2v-1,-v+2,-v+2,v+1]	c_1, c_2, c_3
Chi_{56}	[0,3,3,6,5,4]	[-v-2,-1+v,2v,-v+3,-v+3,v]	c_6, c_1
Chi_{57}	[0,3,3,6,5,6]	[v,-v-1,-2v,v+3,v+3,-v]	c_1, c_6, c_2

1.5 A_6

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten der Chi-Charaktere der Gruppe A_6 behandeln. A_6 ist eine einfache Gruppe der Ordnung 360.

Betrachten wir zunächst die Charaktertafel von A_6.

	2	3	3	·	·	2	·	·
	3	2	·	2	2	·	·	·
	5	1	·	·	·	·	1	1
		1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b
χ_1		1	1	1	1	1	1	1
χ_2		5	1	-1	2	-1	·	·
χ_3		5	1	2	-1	-1	·	·
χ_4		8	·	-1	-1	·	A	$^*A$
χ_5		8	·	-1	-1	·	$^*A$	A
χ_6		9	1	·	·	1	-1	-1
χ_7		10	-2	1	1	·	·	·

$$A = -\zeta_5 - \zeta_5^4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -b5$$

In A_6 existieren insgesamt 196 verschiedene Chi-Charaktere, von denen 164 in MON$-\mathbb{N}$ enthalten sind, und es gibt 31 Charaktere die nicht in MON$-\mathbb{Q}$ enthalten sind.

In A_6 gibt es eine Klasse von konjugierten Untergruppen vom Typus $3^2 : 4$, was heißt: eine zyklische Gruppe der Ordnung 4, die semidirekt operiert auf $Z_3 \times Z_3$. Ein Beispiel einer solchen Gruppe ist

$$R = \langle (4,5,6), (1,2,3), (1,4)(2,5,3,6) \rangle.$$

Es läßt sich schließen, daß für jede nicht-triviale Wahl von zwei Untergruppen H und T aus dieser Klasse der Schnitt $H \cap T$ eine zyklische Untergruppe von Ordnung 4 bestimmt, während die zwei Gruppen zusammen die ganze A_6 erzeugen. Wir bemerken dazu, daß H und T maximal in A_6 sind. Diese Konfiguration gibt Anlaß zu einem Chi-Charakter der Gestalt

$$Chi_{165} = \chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 + 2\chi_5 + \chi_6 + 2\chi_7.$$

Wir haben $\{\mu_1, \ldots, \mu_{10}\} \in GSM$, wobei

$$\begin{array}{lll lll} \mu_1 & = & [0,0,0,0,0,0,1] & \mu_6 & = & [0,1,0,0,0,0,1] \\ \mu_2 & = & [0,0,0,1,1,0,2] & \mu_7 & = & [0,1,0,1,1,1,0] \\ \mu_3 & = & [0,0,0,1,1,1,2] & \mu_8 & = & [0,1,1,0,0,0,0] \\ \mu_4 & = & [0,0,1,0,0,0,1] & \mu_9 & = & [0,1,1,1,2,2,2] \\ \mu_5 & = & [0,0,1,1,1,1,0] & \mu_{10} & = & [0,1,1,2,1,2,2] \end{array}$$

und erhalten dann als Parameterdarstellung für die Zerlegung von Chi_{165} in diese monomialen Charaktere

[-10w-3v-2t-2u+11, w,v,t+2u+v+4w-5,
-v-u-4w+5, t,u,-t-u-2w+3,w-1,w-1].

Behauptung 1.5.1
$Chi_{165} \in \mathrm{MON} - \mathbb{Q}$, *aber es trifft nicht zu, daß* $Chi_{165} \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$.

Beweis
Man kann sofort nachprüfen, daß

$$2.Chi_{165} = 2\mu_2 + \mu_5 + \mu_7 + \mu_8$$

und damit $Chi_{165} \in \mathrm{MON} - \mathbb{Q}$. Nehmen wir an: $Chi_{165} \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$. Betrachte jetzt die Parameterdarstellung. Es folgt, daß t, u, v und w alle nicht-negativ sind und aus c_{10} ergibt sich $w \geq 1$. Dieses liefert, angewendet auf c_8 und c_5, die zwei Bedingungen $t + u \leq 1$ und $u + v \leq 1$. Jetzt sind die Möglichkeiten eingeschränkt auf fünf Fälle, die alle schnell zu einen Widerspruch führen:
a) $t = 0,\ u = 0,\ v = 0$. Dann ergibt c_4, daß $w \geq \frac{5}{4}$, während c_5 zu $w \leq \frac{5}{4}$ führt
b) $t = 0,\ u = 0,\ v = 1$. Aus c_8 erhält man $w \leq \frac{3}{2}$, aber dann ist $w = 1$, und damit c_1 negativ.
c) $t = 0,\ u = 1,\ v = 0$. Aus c_5 folgt entsprechend, daß $w = 1$, und wieder wird c_1 negativ.
d) $t = 1,\ u = 0,\ v = 0$. c_8 führt zu $w = 1$, und dann ist $c_1 = -1$.
e) $t = 1,\ u = 0,\ v = 1$. Aus c_5 und den Voraussetzungen erhält man $w = 1$, aber dann ist $c_1 = -4$. ‖

1.6 Schlußfolgerung

In den letzten Abschnitten wurde erklärt, daß es im allgemeinen nicht möglich sei, eine Lösung für das Brauersche Problem nur mit Hilfe der hier verfügbaren Theorie zu finden. Dieses Phänomen war schon bekannt. Wir haben auch in unseren Beispielen gesehen, daß die Anzahl der ‘Verbrecher’, das heißt *Chi*-Charaktere mit $Chi \notin \mathrm{MON} - \mathbb{Q}$, in gewissem Sinne relativ klein ist. Auch haben wir gefunden, daß für einen *Chi* mit $Chi \in \mathrm{MON} - \mathbb{Q}$ nicht unbedingt $Chi \in \mathrm{MON} - \mathbb{N}$ zu sein braucht. Ferner haben wir gesehen, daß es Gruppen gleicher Ordnung gibt, deren Untergruppenverbände ‘ineinander geschachtelt sind’.

2 Monomialität und Primitivität irreduzibler Charaktere in einfachen Gruppen

2.1 MP

In diesem Kapitel soll die Herkunft irreduzibler Charaktere einfacher Gruppen untersucht werden im Hinblick auf das Hochinduzieren. Es wurde von K. Taketa bewiesen, daß jede M-Gruppe auflösbar ist (Eine Gruppe wird eine M-Gruppe genannt, wenn alle irreduziblen Charaktere der Gruppe monomial sind). Da eine nicht-abelsche einfache Gruppe nie auflösbar ist, brauchen wir mehr zur Betrachtung der Herkunft irreduzibler Charaktere.

Definition 2.1.1
Sei χ ein Charakter der Gruppe G. Wir nennen χ primitiv, wenn es keine echte Untergruppe U von G und $\vartheta \in \mathrm{Char}(U)$ gibt mit $\vartheta^G = \chi$. Eine Gruppe T ist eine PC-Gruppe, wenn die irreduziblen Charaktere von T alle primitiv sind.

Man hat in [**4**] bewiesen, daß es mindestens eine Folge einfacher Gruppen gibt, in der alle Gruppen PC-Gruppen sind. Falls nämlich $n \neq 2m^2$, für $m \in \mathbb{Z}$, so ist die alternierende Gruppe A_{2n+1} eine PC-Gruppe. Diese Eigenschaft wird aber nicht von jeder einfachen Gruppe erfüllt. Sei etwa λ einer der nicht-trivialen linearen Charaktere von A_4. A_4 ist eine maximale Untergruppe von A_5, und der hochinduzierte Charakter λ^{A_5} ist irreduzibel von Grad 5. Also haben wir eine einfache Gruppe gefunden die keine PC-Gruppe ist. Wenn man sich einige relativ kleine einfache Gruppen ansieht, so scheint es angebracht, die nächste Definition einzuführen:

Definition 2.1.2
Wir sagen, daß eine Gruppe in MP liegt, wenn jeder nicht-lineare irreduzible Charakter der Gruppe entweder monomial oder primitiv ist.

Bemerke, daß PC-Gruppen immer MP sind.

Mit Hilfe von GAP sind einige einfache Gruppen nachgeprüft worden im Hinblick auf ihre PC- und MP-Eigenschaft. Es ergibt sich, daß die PC-Eigenschaft im allgemeinen nicht für einfache alternierende Gruppen A_m gilt, mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Ein Gegenbeispiel ist die Gruppe A_6. Auch stellt es sich heraus, daß es einfache Gruppen gibt, die nicht MP sind, zum Beispiel $\mathrm{SL}(3,3)$ und A_8. Die Charaktertafeln sowie die Ordnung und der Typus der maximalen Untergruppen der zu betrachtenden einfachen Gruppen findet man aufgelistet im ATLAS [**3**].

Zum Kontrollieren der MP-Eigenschaft für die Gruppe G kann man jetzt folgendes tun:

1. Aus der Charaktertafel lassen sich die Grade der irreduziblen Charaktere ermitteln.
2. Bestimme mit GAP alle Klassen von konjugierten Untergruppen von G, wofür der Index eines Vertreters kleiner oder gleich der maximale Grad der irreduziblen Charaktere ist.
3. Wenn ein Charakter aus $\mathrm{IRR}(G)$ unerreichbar ist des Grades wegen, so ist dieser jedenfalls primitiv.
4. Induziere die linearen Charaktere der Vertreter, von denen der Index gleich einem Grad eines irreduziblen Charakters ist. Das bestimmt die Menge der monomialen Charaktere unter den irreduziblen Charakteren.
5. Induziere die Vetretercharaktere, bei denen das Produkt des Index mit dem Grad gleich einem Grad eines irreduziblen Charakters ist. Dieses entscheidet schließlich über die Primitivität der nach 4. übriggebliebenen irreduziblen Charaktere.

Mit Hilfe der *Group Characters*, die in GAP-3.4 definiert sind, kann man leicht Charaktere identifizieren, addieren und hochinduzieren. In den nächsten Abschnitten sind die Charaktertafeln immer so wie im ATLAS [**3**] geordnet. In den nicht-trivialen Fällen ist eine Liste mit der Herkunft der monomialen Charaktere gegeben, in der mit "P" die Primitivität eines Charakters angedeutet wird; ist ein Charakter nicht primitiv, so sind die Typen der Herkunft-Untergruppen gegeben. Es sei bemerkt, daß der triviale Charakter einer Gruppe sowohl monomial als auch primitiv ist.

2.2 Einfache Gruppen in MP

A_5; Ordnung 60.

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\chi_i(1)$	3	3	4	5
Herkunft	P	P	P	A_4

GL(3.2); Ordnung 168.

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
$\chi_i(1)$	3	3	6	7	8
Herkunft	P	P	P	S_4	7:3

A_6; Ordnung 360.

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7
$\chi_i(1)$	5	5	8	8	9	10
Herkunft	P	P	P	P	P	$3^2:4$

Bemerke insbesondere, daß sich erweist, daß A_6 keine PC-Gruppe ist, da χ_7 monomial ist.

SL(2, 8); Ordnung 504.

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
$\chi_i(1)$	7	7	7	7	8	9	9	9
Herkunft	P	P	P	P	P	$2^3:7$	$2^3:7$	$2^3:7$

PSL(2, 11); Ordnung 660.

Bemerke, daß es in GAP keinen Befehl gibt für das Definieren einer PSL-Gruppe. Hier können wir aber leicht eine Präsentierung für PSL(2, 11) gewinnen, da alle maximalen Untergruppen von Index 12 in der Mathieu-Gruppe M_{11} von Typus PSL(2, 11) sind, und M_{11} sich in GAP einführen läßt mit Hilfe der Präsentation

$$M_{11} \cong \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11),\ (5,6,4,10),\ (11,8,3,7)\rangle.$$

GAP ist außerdem imstande, den Untergruppenverband von M_{11} zu berechnen, und daraus kann man schließlich eine Präsentierung für PSL(2, 11) destillieren.

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8
$\chi_i(1)$	5	5	10	10	11	12	12
Herkunft	P	P	P	P	P	11:5	11:5

A_7; Ordnung 2520.

A_7 ist eine PC-Gruppe, sehe Abschnitt 2.1.

M_{11}; Ordnung 7920.

Die sporadische Mathieusche Gruppe M_{11}. Zur Präsentierung sehe man oben für PSL(2, 11).

	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9	χ_{10}
$\chi_i(1)$	10	10	10	11	16	16	44	45	55
Herkunft	P	P	P	$A_6.2$	P	P	P	P	$3^2:Q_8.2$

Im Appendix bei Isaacs [**7**] sind die Charaktertafeln einer Anzahl von einfachen Gruppen gegeben. Diese Gruppen sind genau diejenigen, die bis jetzt in diesem Kapitel betrachtet worden sind, ausgenommen die Gruppe A_7. Das Ermitteln oder Widerlegen der MP-Eigenschaft für die Gruppen dieser Liste war dann auch Anlaß zu unserer Definition 2.1.2.

Es stellt sich heraus, daß alle sonstigen einfachen Gruppen der Ordnung kleiner als 20000 auch in MP liegen außer der einfachen Gruppe $\mathrm{SL}(3,3)$. Dieses kann man gleich aus den Graden der irreduziblen Charaktere und den Indizes der maximalen Untergruppen schließen:

Gruppe	$\mathrm{PSL}(2,11)$	$\mathrm{PSL}(2,13)$	$\mathrm{PSL}(2,17)$	$\mathrm{PSL}(2,19)$
Ordnung	660	1092	2448	3420
$\mathrm{Max}(\chi_i(1))$	12	14	18	20
Min(Index)	11	14	18	18

Gruppe	$\mathrm{PSL}(2,16)$	$\mathrm{U}(3,3)$	$\mathrm{PSL}(2,23)$	$\mathrm{PSL}(2,25)$
Ordnung	4080	6048	6072	7800
$\mathrm{Max}(\chi_i(1))$	17	32	24	26
Min(Index)	17	28	22	26

Gruppe	$\mathrm{PSL}(2,27)$	$\mathrm{PSL}(2,29)$	$\mathrm{PSL}(2,31)$
Ordnung	9828	12180	14880
$\mathrm{Max}(\chi_i(1))$	28	30	32
Min(Index)	12*	30	32

* Andere $\chi_i(1)$: 1, 13, 26, 27.

2.3 Zwei einfache Gruppen außerhalb MP: $\mathrm{SL}(3,3)$ und A_8

$\mathrm{SL}(3,3)$; Ordnung 5616.

Das Maximum der Grade der irreduziblen Charaktere beträgt 39, und wir betrachten deshalb den Teil des Untergruppenverbandes mit Untergruppen, deren Index kleiner als 40 ist:

Klasse	Ordnung Vertreter	Länge Klasse	Index in SL(3,3)	maximal in Klasse
45	144	39	39	49
46	144	39	39	50
47	216	13	26	49
48	216	13	26	50
49	432	13	13	51
50	432	13	13	51
51	5616	1	1	

In untenstehender Tabelle sind für jeden irreduziblen Charakter von $\mathrm{SL}(3,3)$ alle Herkünfte aufgelistet.

Irreduziblen	$\chi_i(1)$	Primitiv	Monomiale Herkunft	Nicht-Monomiale Herkunft
χ_1	1	•	51	
χ_2	12	•		
χ_3	13		49,50	
χ_4	16	•		
χ_5	16	•		
χ_6	16	•		
χ_7	16	•		
χ_8	26		47,48	49,50
χ_9	26			49,50
χ_{10}	26			49,50
χ_{11}	27	•		
χ_{12}	39		45,46	

Wir sehen, daß man χ_9 und χ_{10} bilden kann, wenn man einen bestimmten Charakter aus einem Vertreter H_{49} oder H_{50} aus Klasse 49 beziehungsweise Klasse 50 hochinduziert nach $\mathrm{SL}(3,3)$. H_{49} und H_{50} sind isomorphe Untergruppen von $\mathrm{SL}(3,3)$ von Typus $3^2 : 2.S_4$. Wenn man aus ihren irreduziblen Charakteren einen nicht-rationalen Charakter von Grad 2 hochinduziert, ergibt sich in der Tat χ_9 oder χ_{10}. Da in dieser Tabelle alle Möglichkeiten aufgelistet sind, ergibt sich, daß χ_9 und χ_{10} weder primitiv noch monomial sind. Damit ist bewiesen, daß SL$(3,3)$ nicht in MP liegt.

A_8; Ordnung 20160.

Hier tritt 70 als Höchstgrad eines irreduziblen Charakters auf, und wir können uns beschränken auf die folgende Liste von Klassen von konjugierten Untergruppen:

Klasse	Ordnung Vertreter	Länge Klasse	Indexin A_8	maximal in Klasse
127	288	35	70	132
128	288	35	70	132
129	288	35	70	132
130	360	28	56	133,136
131	360	56	56	137
132	576	35	35	137
133	720	28	28	137
134	1344	15	15	137
135	1344	15	15	137
136	2520	8	8	137
137	20160	1	1	

Hier erhalten wir, daß es zwei konjugierte irreduzible Charaktere (χ_{10} und χ_{11}) von A_8 gibt, die weder primitiv noch monomial sind. Die Herkunftcharaktere stammen von genau zwei Klassen von isomorphen maximalen Untergruppen, deren Typus $2^3 : L(3,2)$ ist, und sie sind irreduzibel, nichtrational und vom Grad 3.

Irreduziblen	$\chi_i(1)$	Primitiv	Monomiale Herkunft	Nicht-Monomiale Herkunft
χ_1	1	•	137	
χ_2	7	•		
χ_3	14	•		
χ_4	20	•		
χ_5	21	•		
χ_6	21	•		
χ_7	21	•		
χ_8	28	•		
χ_9	35		132	
χ_{10}	45			134,135
χ_{11}	45			134,135
χ_{12}	56	•		
χ_{13}	64	•		
χ_{14}	70		127,129	132

2.4 Schlußfolgerung

Für die ersten neunzehn einfachen Gruppen aus dem Atlas [**3**] ist jetzt ermittelt, ob sie der Klasse MP zugehören oder nicht. Dabei haben wir gesehen, daß die MP-Eigenschaft im allgemeinen nicht für einfache Gruppen gilt. Es wäre aber interessant zu wissen, was bei jeder Serie von einfachen Gruppen und bei den sporadischen einfachen Gruppen passiert. Dazu wäre es nützlich, generelle Formeln für die Indizes der großen Untergruppen und für die Grade der irreduziblen Charaktere zu ermitteln.

Wir haben auch herausgefunden, daß es A_m gibt, mit m gerade aus $\mathbb{Z}_{\geq 6}$, die nicht in PC liegen. Man kann sich fragen, was bei den Schur'schen Erweiterungsgruppen $\hat{A}_n$ passiert. Ohne auf dieses Thema einzugehen, sei hier bemerkt, daß der Schurmultiplikator von A_5 Ordnung 2 hat, und daß $\hat{A}_5 \cong \mathrm{SL}(2,5)$ auftritt. $\hat{A}_5$ ist keine PC-Gruppe, da seine irreduziblen Charaktere von Grad 5 und 6 beide monomial sind. Wenn man eine geeignete Präsentierung hat, so läßt sich der Untergruppenverband von $\hat{A}_6$ mit Hilfe von GAP ohne weiteres bilden, und ist es nicht mehr schwer die PC-Eigenschaft nachzuprüfen. Über die Theorie der Schur'schen Erweiterungen lese man zum Beispiel in Huppert [**6**], Seite 181ff.

3 B-Gruppen

3.1 B-Gruppen, Einführung

In [**10**] und [**11**] haben R.W. van der Waall und A. Bensaïd die Klasse derjenigen endlichen Gruppen studiert, deren sämtliche Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind. In diesen Arbeiten sind aber einige Gruppen unberücksichtigt geblieben, wofür noch zu zeigen sei, daß sie die obengenannte Eigenschaft erfüllen. Unser Ziel ist dies zu beweisen. Dazu brauchen wir erst einige Definitionen und Notationen.

Definition 3.1.1
Man nennt die Gruppe G eine B-*Gruppe, wenn je zwei Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind in G. Man schreibt $G \in \mathcal{B}$. Man nennt die Gruppe G eine Iso-Gruppe, wenn je zwei Untergruppen gleicher Ordnung isomorph sind.*

Beispiele
Es läßt sich schnell zeigen, daß die folgenden Gruppen in $\mathcal{B}$ liegen:

i. $\mathrm{SL}(2,3)$,
ii. A_5,
iii. $\mathrm{SL}(2,5)$.

Jetzt folgen einige grundlegende Eigenschaften. Die Beweise sind einfach oder sind zu finden in [**11**].

1. Jede B-Gruppe ist eine Iso-Gruppe.
2. Untergruppen von B-Gruppen sind Iso-Gruppen.
3. Ist G eine B-Gruppe und $N \lhd G$, so ist auch die Faktorgruppe G/N eine B-Gruppe.

Weitere Eigenschaften sind in [**10**] und [**11**] zu finden.

In den Abschnitten 3.2 und 3.3 sollen alle in Frage kommenden Gruppen untersucht werden, die sich von GAP haben bearbeiten lassen. Außerdem steht im letzten Abschnitt 3.3 ein theoretischer Beweis, daß die nicht-auflösbaren Gruppen, wie aufgelistet im Satz 3.3.1, in $\mathcal{B}$ liegen.

3.2 Klassifikation auflösbarer B-Gruppen

In den Abschnitten 3.2.a–3.2.c soll bewiesen werden, daß die nächsten Gruppen B-Gruppen sind. Weshalb wir gerade diese Gruppen untersuchen, wird erläutert im Satz 3.2.1.

Gruppe	Ordnung
$\mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_5 \times Z_5)$	600
$\mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$	2904
$(\mathrm{SL}(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$	14520

Sei nun eine Gruppe G gegeben mit einem Normalteiler M vom Typus $M \cong (Z_p \times Z_p)$, mit einer Primzahl p. Setze voraus, daß G eine B-Gruppe ist. Der nächste Satz reduziert dieses auf drei Fälle:

Satz 3.2.1(R.W. van der Waall, [10], Theorem 8)
Sei M ein minimaler Normalteiler der B*-Gruppe G mit $M \cong (Z_p \times Z_p)$ und p eine Primzahl. Sei weiterhin vorausgesetzt, daß $G/C_G(M)$ auflösbar ist, wenn $p = 11, 19, 29$ oder 59. Sei $M_1 < M$ eine Untergruppe von M von Index gleich p. Dann tritt einer der nächsten Fälle auf:*

1. *$G/C_G(M) \cong C_{t(p+1)}$ mit $2^k \parallel (p-1), 2^k \parallel t, t \mid (p-1), k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Betrachte $G/C_G(M)$ als eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(M)$. Dann ist $P\mathrm{Aut}(M) \cap G/C_G(M)$ eine zyklische Gruppe von Ordnung t. Das heißt, daß $N_G(M_1)/C_G(M)$ von Ordnung t ist.*
2. *$G/C_G(M) \cong (\langle S, \lambda \rangle \times T)$, wo $|\lambda| = 2^{k+1}$, $|\sigma| = \frac{p+1}{2} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ mit $S = \langle \sigma \rangle$, $\lambda^{-1}\sigma\lambda = \sigma^{-1}$, und T zyklisch mit ungerader Ordnung; $T\langle \lambda^2 \rangle$ operiert als $P\mathrm{Aut}(M) \cap G/C_G(M)$ auf M und $T\langle \lambda^2 \rangle \cong N_G(M_1)/C_G(M)$; bemerke, daß $|T|$ ein Teiler von $p-1$ ist, und daß außerdem $2^k \parallel (p-1)$, wobei $k \geq 1$.*
3. *entweder $p = 5$ und $G/C_G(M) \cong \mathrm{SL}(2,3)$ oder $p = 11$ und $G/C_G(M) \cong (\mathrm{SL}(2,3) \times Z_u)$, mit $u = 1$ oder $u = 5$.*

In den Fällen 1) und 2) operiert $G/C_G(M)$ als eine Gruppe semilinearer Transformationen auf dem 2-dimensionalen $\mathbb{F}_p$-Raum M. Da G eine B*-Gruppe ist, gilt in diesen drei Fällen, daß $p \nmid |G/C_G(M)|$.* $\parallel$

In [**10**] war noch zu zeigen, daß die im Fall 3) auftretenden Gruppen in der Tat B-Gruppen sind. Wie angekündigt, beweisen wir das jetzt.

3.2.a $\mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_5 \times Z_5)$

Wir versuchen eine Darstellung von $\mathrm{SL}(2,3)$ zu finden, als (2×2)-Matrixgruppe, mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_5$. Es gilt $\hat{A}_5 \cong \mathrm{SL}(2,5)$. Es ergibt sich, daß

$\hat{A}_5$ die Gruppe $\hat{A}_4$ als Untergruppe enthält, und $\hat{A}_4$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}(2,3)$. Wir können mit GAP den Untergruppenverband von $\mathrm{SL}(2,5)$ ausrechnen. Wenn wir einen Vertreter aus der einzigen Klasse von Untergruppen der Ordnung 24 nehmen, haben wir eine irreduzible, treue 2-dimensionale Matrixdarstellung über $\mathbb{F}_5$ von $\mathrm{SL}(2,3)$ gefunden. Damit können wir die definierenden Elemente von $G_1 := \mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_5 \times Z_5)$ aufschreiben. Es gilt, daß $G_1 \cong \langle s_1, s_2, z_1, z_2 \rangle$ mit

$$s_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wo $s_1, s_2 \in \mathrm{SL}(3,5)$ und $\langle z_1, z_2 \rangle \cong (Z_5 \times Z_5)$. Wenn wir diese Präsentierung in GAP übertragen, so erhalten wir untenstehenden Verband, woraus wir schließen, daß G_1 eine B-Gruppe ist:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	10	25	24
2	25	2	11	1	25
3	100	3	12	1	50
4	75	4	13	4	75
5	6	5	14	3	100
6	100	6	15	4	150
7	25	8	16	1	200
8	30	10	17	1	600
9	30	20			

3.2.b $\mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$

Jetzt möchten wir versuchen zu beweisen, daß die Gruppe $\mathrm{SL}(2,3)$ als Untergruppe einer linearen Gruppe über den Körper $\mathbb{F}_{11}$ auftritt. Wenn wir uns in ATLAS [**3**], die maximalen Untergruppen der Gruppe $L_2(11) = \mathrm{PSL}(2,11)$ ansehen, so sehen wir, daß zwei Klassen von konjugierten Untergruppen von Typus A_5 maximal in $\mathrm{PSL}(2,11)$ liegen. Auch wird erwähnt, daß $2.\mathrm{PSL}(2,11) \cong \mathrm{SL}(2,11)$ ist. Daraus ist man in der Lage zu schließen, daß $\hat{A}_5$ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,11)$ ist. Wie oben liegt $\mathrm{SL}(2,3)$

innerhalb $\hat{A}_5$ und damit in $\mathrm{SL}(2,11)$. Es gibt zwei Klassen von konjugierten Untergruppen von Ordnung 24 in $\mathrm{SL}(2,11)$. Mit Hilfe der GAP-Funktion *GroupId*, die den Isomorphietypus z.B. von Gruppen mit einer Ordnung bis zu 100 bestimmt, können wir gleich bestimmen, welche Klasse Gruppen enthält, die isomorph zu $\mathrm{SL}(2,3)$ sind. So erhalten wir erstens eine treue 2-dimensionale Darstellung für $\mathrm{SL}(2,3)$ als Matrizengruppe mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_{11}$. Wie oben läßt sich dann schnell eine Präsentierung für die ganze Gruppe $G_2 := \mathrm{SL}(2,3) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ berechnen. Es gilt, daß $\mathrm{SL}(2,3) \cong \langle a_1, a_2 \rangle$ mit $a_1, a_2 \in \mathrm{SL}(2,11)$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die GAP-Funktion *PermGroup* gibt uns eine, in diesem Fall nicht sehr geeignete, Permutationspräsentation, womit wir aber ausreichend schnell den Untergruppenverband ausrechnen können, und schließen, daß G_2 eine B-Gruppe ist:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	10	1	121
2	121	2	11	1	242
3	484	3	12	4	363
4	363	4	13	3	484
5	484	6	14	4	726
6	121	8	15	1	968
7	12	11	16	1	2904
8	132	22			
9	121	24			

3.2.c $(\mathrm{SL}(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$

Es gilt, daß $\mathrm{GL}(2,11) \cong (Z_5 \times \mathrm{SL}(2,11).2)$, siehe ATLAS [**3**], und das Zentrum von $\mathrm{GL}(2,11)$ ist von der Form $Z_5 \times Z(\mathrm{SL}(2,11)) \cong (Z_5 \times Z_2)$. Wenn wir die 5-Sylowuntergruppe des Zentrums von $\mathrm{GL}(2,11)$ betrachten, zusammen mit den erzeugenden Elementen für $\mathrm{SL}(2,3)$ wie in 3.2.b, so erhalten wir eine Präsentierung unserer Gruppe

$$G_3 := (\mathrm{SL}(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11}).$$

Es gilt, daß $G_3 \cong \langle a_1, a_2, c_1 \rangle$, mit a_1 und a_2 wie in 3.2.b und mit

$$c_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Herstellen einer Permutationspräsentierung sehen wir wieder aus dem Untergruppenverband, daß G_3 eine B-Gruppe ist, und damit sind die drei Fälle des Satzes 3.2.1(3) vollständig erörtert. Da der Untergruppenverband von G_2 im Verband von G_3 enthalten ist, schreiben wir hier nur die neuen Klassen auf.

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
17	121	5	26	1	605
18	121	10	27	1	1210
19	484	15	28	4	1815
20	363	20	28	3	2420
21	484	30	29	4	3630
22	121	40	30	1	4840
23	132	55	31	1	14520
24	132	110			
25	121	120			

3.3 Klassifikation nicht-auflösbarer B-Gruppen

In der Arbeit über nicht-auflösbare B-Gruppen [**11**] haben A. Bensaïd und R.W. van der Waall den nächsten Satz bewiesen, der hier in einer angepaßten Fassung präsentiert wird. Die Überlegungen die diese Anpassung rechtfertigen, folgen später in diesem Absatz.

Satz 3.3.1 ([11], Theorem 11)
Sei G eine nicht-auflösbare B*-Gruppe, deren* 2*-Sylowgruppen Quaternionengruppen der Ordnung 8 sind. Dann ist G in einer der folgenden sieben Mengen enthalten.*

i. $\mathrm{SL}(2,5) \times H$, $ggT(|H|, 30) = 1$;

ii. $(\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})) \times H$, $ggT(|H|, 330) = 1$;

iii. $(\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{19} \times Z_{19})) \times H$, $ggT(|H|, 570) = 1$;

iv. $(\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{29} \times Z_{29})) \times H$, $ggT(|H|, 870) = 1$;

v. $((\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{29} \times Z_{29})) \times H)\langle c \rangle$, *mit* $|c| = 7^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $H^c = H$, $[\mathrm{SL}(2,5), c] = \{1\}$, $t^c = t^{16}$ *für alle* $t \in (Z_{29} \times Z_{29})$, $c^7 \in H$,

$ggT(|H|, 870) = 1$;

vi. $(\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{59} \times Z_{59})) \times H$, *$ggT(|H|, 1770) = 1$;*

vii. $((\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{59} \times Z_{59})) \times H)\langle d\rangle$, *mit* $|d| = 29^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $H^d = H$, $[\mathrm{SL}(2,5), d] = \{1\}$, $t^d = t^4$ *für alle* $t \in (Z_{59} \times Z_{59})$, $d^{29} \in H$, *$ggT(|H|, 1770) = 1$;*

Außerdem gilt in allen Fällen, daß $C_G(C) = (Z_p \times Z_p) \times H$, für jede zyklische Untergruppe C der Ordnung p von $Z_p \times Z_p$. In den Fällen i), ii), iii), iv) und vi) ist H eine auflösbare B*-Gruppe, während in den Fällen v) und vii) $H\langle c\rangle$ und $H\langle d\rangle$ auflösbar sind und in $\mathcal{B}$ liegen.*

In diesem Abschnitt 3.3 soll bewiesen werden, daß für $H = \{1\}$ alle Gruppen G des Satzes 3.3.1 tatsächlich B-Gruppen sind, falls $C_G(A) = (Z_p \times Z_p)$ für jede zyklische Untergruppe A der Ordnung p von $Z_p \times Z_p$ erfüllt sei. Der Leser möge den Fall $H \neq \{1\}$ selbst beweisen.

Die Kommutatorgruppe von $\mathrm{SL}(2,5)$ ist gleich $\mathrm{SL}(2,5)$ und deshalb ist $\mathrm{SL}(2,5)$ eine nicht-auflösbare Gruppe. Wir haben schon gesehen, daß $\mathrm{SL}(2,5)$ eine Schur'sche Darstellungsgruppe der einfachen Gruppe A_5 ist. Das Zentrum von $\mathrm{SL}(2,5)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung 2. Im auflösbaren Fall haben wir schon einige Untergruppenverbände gesehen, und wir werden Wiederholungen später ausschließen, wenn wir jetzt den Untergruppenverband von $\mathrm{SL}(2,5)$ angeben:

Klasse	Länge	Ordnung	Klasse	Länge	Ordnung
1	1	1	7	5	8
2	1	2	8	6	10
3	10	3	9	10	12
4	15	4	10	6	20
5	6	5	11	5	24
6	10	6	12	1	120

3.3.a $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$.

Wie in 3.2 erörtert, gibt es zum Beispiel die Darstellung $\mathrm{SL}(2,5) \cong \langle \mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2\rangle$ wobei $s_1, s_2 \in \mathrm{SL}(2,11)$:

$$s_1 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier werden die Gruppen "größer". Jetzt wird es also lohnend, eine kleinere Permutationsdarstellung zu berechnen für die ganze Gruppe $G_4 :=$

$\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$. Am besten sei dieses illustriert von den entsprechenden GAP-Befehlen, die im Anhang aufgenommen sind. Am Ende des Abschnitts 3.3.c wird gezeigt, wie der Untergruppenverband einer Gruppe der Gestalt $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ aussieht. Jedenfalls ist GAP bei der Gruppe G_4 noch imstande, den Untergruppenverband schnell auszurechnen.

3.3.b $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{19} \times Z_{19})$

A_5 tritt als eine maximale Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2,19)$ auf. Daraus kann man schließen, daß eine Gruppe isomorph zu $\mathrm{SL}(2,5)$ als maximale Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,19)$ vorkommt. Es gilt, daß $\mathrm{SL}(2,5) \cong \langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 \rangle$ mit

$$d_1 = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d_2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } d_1, d_2 \in \mathrm{SL}(2,19).$$

Das normale *Lattice-Programm* für Gruppen, präsentiert als eine Permutationsgruppe, brauchte für diese Gruppe, auch in der kleinen Darstellung, zuviel Speicherplatz und hat keine Ergebnisse ermittelt. Nur mit Hilfe eines Umwegs war es möglich, den Verband zu bilden, und mit Hilfe von GAP zu beweisen, daß auch diese Gruppe eine B-Gruppe ist. Damals (im Frühling 1994) war die Gruppe aus 3.3.b die größte Gruppe mit Möglichkeiten für GAP.

Obwohl die zwei Gruppen (iv) und (vi) nicht mehr Struktur haben als die Gruppen (ii) und (iii), die wir schon betrachtet haben, werden die Darstellungen zu großin Hinsicht auf das Rechnen mit GAP.

3.3.c Die Fälle (iv) und (vi) des Satzes 3.3.1

Bevor wir beweisen können, daß die Gruppen $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ von Satz 3.3.1 für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ in $\mathcal{B}$ liegen, benötigen wir einige Bemerkungen über Hallgruppen und ein Lemma.

Man sagt, daß in einer Gruppe G der π-Sylow-Satz gilt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: falls U eine π-Untergruppe von G und V eine maximale π-Untergruppe von G, so gibt es ein $g \in G$ mit $U^g \leq V$.

Satz 3.3.2 (P. Hall ([6], IV.1.8 Hauptsatz))
Ist G auflösbar, so hat G π-Hallgruppen zu jeder Primzahlmenge π. Je zwei π-Hallgruppen von G sind zu einander konjugiert in G, und jede π-Untergruppe von G ist in wenigstens einer π-Hallgruppe von G enthalten.

Es gilt also in jeder auflösbaren Gruppe der π-Sylowsatz. Der nächste Satz, der Satz von Maschke, sagt uns, daß man unter bestimmten Voraussetzungen einen Modul direkt in Teilmoduln zerlegen kann. Den Satz und den Beweis findet man in ([**6**], I.17.7 Satz).

Satz 3.3.3
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, und K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \nmid n$. Sei V ein $K[G]$-Modul und V_1 ein $K[G]$-Teilmodul von V. Dann gibt es eine direkte Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ von V in den $K[G]$-Moduln V_1 und (sage) V_2.

Der nächste Satz ist wesentlich dem Theorem 8 aus [**11**] ähnlich. Mit Hilfe dieses Satzes sind wir imstande, den Hauptsatz 3.3.5 zu beweisen.

Satz 3.3.4
Sei G eine B-Gruppe. Setze voraus, daß $2^2 \parallel |G|$. Sei $N \lhd G$, mit $G/N \cong A_5$. Dann gibt es $T \lhd G$ mit $T \cong A_5$ und $G = NT$. Also ist auch $[N,T] = 1$ und $N \cap T = 1$, wobei N eine B-Gruppe ist mit $ggT(30, |N|) = 1$.

Hauptsatz 3.3.5
Sei $G = K \ltimes (Z_p \times Z_p)$, mit $K \cong \mathrm{SL}(2,5)$, $\mathrm{p} \in \{11, 19, 29, 59\}$. Sei $C_G(\mathcal{P}) = (Z_p \times Z_p)$ für jede $\mathcal{P} \leq (Z_p \times Z_p)$ mit $|\mathcal{P}| = p$. Dann ist G eine B-gruppe.

Zum Beweis formulieren wir zuerst ein Lemma.

Lemma 3.3.6
Sei G eine B-Gruppe und $H \leq G$, $H \cong \mathrm{SL}(2,5)$, wobei $G = H \ltimes (Z_p \times Z_p)$, mit $p \in \{11, 19, 29, 59\}$. Dann gilt $C_G(\mathcal{P}) = (Z_p \times Z_p)$ für jede $\mathcal{P} \leq G$ mit $|\mathcal{P}| = p$.

Beweis
Es sei angenommen, das Lemma wäre falsch für eine Untergruppe $\mathcal{P}$ der Ordnung p von $(Z_p \times Z_p)$. Es gibt ein Element $g \in G \setminus (Z_p \times Z_p)$ das $\mathcal{P}$ zentralisiert, das heißt: g operiert auf natürliche Weise auf $\mathcal{P}$ durch Konjugieren. Wir können jetzt Satz 3.3.3 anwenden, da $ggT(|g|, p) = 1$ und sehen, daß es eine Untergruppe $\mathcal{Q} \leq (Z_p \times Z_p)$ gibt mit $\mathcal{Q}^g = \mathcal{Q}$ und mit $(Z_p \times Z_p) = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Wegen der B-Eigenschaft sind die Gruppen $\mathcal{P}\langle g\rangle$ und $\mathcal{Q}\langle g\rangle$ abelsch von gleicher Ordnung, und da g nun auf triviale Weise operiert auf sowohl $\mathcal{P}$ wie $\mathcal{Q}$, operiert g auf triviale Weise auf $Z_p \times Z_p$, das heißt

$$C_G(Z_p \times Z_p) > (Z_p \times Z_p).$$

Wir haben, daß $C_G(Z_p \times Z_p) \trianglelefteq G$.

* Sei $C_G(Z_p \times Z_p) = G$. Dann operiert die ganze Gruppe G auf triviale Weise auf $(Z_p \times Z_p)$. Das steht im Widerspruch zur Annahme, daß G eine B-Gruppe ist.

* Es gibt nur einen nicht-trivialen Normalteiler in $\mathrm{SL}(2,5)$ nämlich Z_2 mit $Z_2 = Z(\mathrm{SL}(2,5))$. Es wäre also noch möglich, daß $C_G(Z_p \times Z_p) \cong Z_2 \times (Z_p \times Z_p)$. Dann ergibt sich, daß $G/C_G(Z_p \times Z_p) \cong A_5$. Z_2 ist charakteristisch in $\mathrm{SL}(2,5)$ und deswegen gibt es ein $U \trianglelefteq G$ mit $|U| = 2$, aber dann ist, wegen Eigenschaft 3 in Abschnitt 3.1, auch G/U eine B-Gruppe, derart, daß

$$C_G(Z_p \times Z_p)/U \cong Z_2 \times (Z_p \times Z_p)/U \cong (Z_p \times Z_p).$$

Man beachte, daß $|G/U| = p^2.2^2.3.5$ und daß $C_G(Z_p \times Z_p)/U \trianglelefteq G/U$ mit $(G/U)/(C_G(Z_p \times Z_p)/U) \cong A_5$. Wir sehen, daß wir Satz 3.3.4 benutzen können, und so erhalten wir die Existenz einer $T/U \trianglelefteq G/U$ mit $T/U \cong A_5$, also $G/T \cong (Z_p \times Z_p)$. Deswegen gilt $G = T(Z_p \times Z_p)$. Wegen der Gruppenordnungen gilt, daß $(|T|, p) = 1$ oder, $T \cap (Z_p \times Z_p) = 1$. Außerdem gilt, daß $T \trianglelefteq G$, und wir erhalten endgültig, daß $G \cong T \times (Z_p \times Z_p)$. Aber dann ist G keine B-Gruppe. Widerspruch. $\|$

Jetzt beweisen wir den Hauptsatz 3.3.5.

Beweis
Wir verwenden ständig, daß jede $H \leq G$ mit $p \mid |H|$ eine normale Sylow-p-Untergruppe enthält. Wir haben zu zeigen, daß je zwei Untergruppen von G gleicher Ordnung zu einander in G konjugiert sind. Wir werden den Beweis in verschiedene Teile aufspalten.

1) *$A, B \leq G$ mit $|A| = |B|$, und $p^2 \mid |A|$.*

Nun ist $G/(Z_p \times Z_p) \cong \mathrm{SL}(2,5)$ eine B-Gruppe. Aber dann sind $A/(Z_p \times Z_p)$ und $B/(Z_p \times Z_p)$ konjugiert in $G/(Z_p \times Z_p)$. Also sind A und B in G konjugiert.

2) *$A, B \leq G$ mit $|A| = |B|$ und $p \nmid |A|$.*

Es sei $U := A(Z_p \times Z_p)$ und $V := B(Z_p \times Z_p)$. Wir haben in 1) gezeigt, daß $U \sim_G V$, und daher gibt es $g \in G$ mit $U^g = V$. Dann ist $A^g(Z_p \times Z_p) = V = B(Z_p \times Z_p)$. Wegen des Satzes von Schur-Zassenhaus sind alle zur B isomorphen Untergruppen von V zu einander konjugiert. Also $A \sim_G A^g \sim_G B$.

3) *$H, T \leq G$ mit $|H| = |T|$ und $p \,\|\, |H|$.* Man beachte, daß immer $C_G(P) = (Z_p \times Z_p)$ für jede $P \leq G$ der Ordnung p, wie angenommen. Bis jetzt konnten wir den Beweis führen für allgemeine $p \in \{11, 19, 29, 59\}$, aber jetzt teilt er sich angesichts der Größe von p.

p=11

a) *Untergruppen der Ordnung* 11.

Im allgemeinen gilt für $H \leq G$, daß

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(H).$$

Sei nun $\mathcal{P}$ eine Untergruppe der Ordnung 11 von G. Da $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}) \cong Z_{10}$ ergibt es sich, daß $N_G(\mathcal{P})/C_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{10}$. Wir haben $C_G(\mathcal{P}) \cong (Z_{11} \times Z_{11})$. Andererseits ist bekannt, daß $|G : N_G(\mathcal{P})|$ der Anzahl derjenigen Untergruppen von G entspricht, welche in G zu $|\mathcal{P}|$ konjugiert sind. Wir haben

$$|G : N_G(\mathcal{P})| \leq 12,$$

weil G nur 12 Untergruppen der Ordnung 11 enthält. Nun ist $|G/(Z_{11} \times Z_{11})| = 120 = 2^3.3.5$, und daher $|G : N_G(\mathcal{P})| = 12$, womit also alle Untergruppen von G der Ordnung 11 konjugiert sind in G.

b) *Untergruppen der Ordnung* $11.t$, mit $t > 1$ und $11 \nmid t$.

Sei H eine solche Untergruppe. Aus a) sehen wir, daß $|N_G(\mathcal{P}) : \mathcal{P}| = 2.5.11$ und aus der ersten Bemerkung dieses Beweises entnehmen wir, daß es genau eine $\mathcal{P} \leq H$ gibt mit $|\mathcal{P}| = 11$. Dann ist also $H/\mathcal{P}$ eine Hall-t-Untergruppe von $N_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ für $t \in \{\{2\}, \{5\}, \{2,5\}\}$. Da $\mathcal{P} \trianglelefteq N_G(\mathcal{P})$ und $\mathcal{P}$ wie $N_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ auflösbar ist so, folgt aus dem Hall'schen Satz, daß alle Untergruppen gleicher Ordnung von $N_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ innerhalb $N_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$ konjugiert sind. Dann läßt sich schließen, daß alle Untergruppen von G gleicher Ordnung $11.t$ zu einander in G konjugiert sind, weil $N_G(\mathcal{P}_1) \sim_G N_G(\mathcal{P})$ falls $\mathcal{P}_1 \sim_G \mathcal{P}$ (und wir hatten schon bewiesen, daß je zwei Untergruppen von G der Ordnung 11 zu einander konjugiert sind in G).

p=19

G enthält 20 Untergruppen der Ordnung 19. Sei $\mathcal{P}$ eine solche Untergruppe. Für $\mathcal{P}$ gilt, daß $N_G(\mathcal{P})/C_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{18}$ und dann auch $|N_G(\mathcal{P})| : |(Z_{19} \times Z_{19})| = 6$, wegen $C_G(\mathcal{P}) = (Z_{19} \times Z_{19})$ und $|N_G(\mathcal{P})/C_G(\mathcal{P})| \leq 20$. Damit sind wieder alle Untergruppen von G der Ordnung 19 konjugiert. Sie $H \leq G$ mit $|H| = 11.t$, wo $11 \nmid t,\ t > 1$. Argumentiere jetzt wie bei $p = 11$, aber hier für Hall-t-Untergruppen mit $t \in \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$.

p=29

Sei $\mathcal{P} \leq (Z_{29} \times Z_{29})$ mit $|\mathcal{P}| = 29$. Es gibt insgesamt 30 Untergruppen von G der Ordnung 29. Es gilt $N_G(\mathcal{P})/C_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{28}$ und so folgt, weil $7 \nmid |G/(Z_{29} \times Z_{29})|$, daß $|N_G(\mathcal{P})| : |(Z_{29} \times Z_{29})| = 4$. Alle Untergruppen von

G der Ordnung 29 sind also konjugiert. Sei jetzt H eine Untergruppe der Ordnung 4.29. Man sieht, daß $H/\mathcal{P}$ eine Hall-2-Gruppe ist in $N_G(\mathcal{P})/\mathcal{P}$, und ähnlich wie bei den obigen Primzahlen sind alle Untergruppen der Ordnung $|H|$ zu einander konjugiert in G. Sei $|T| = 2.29$, für $T \leq G$. Es gibt genau eine $\mathcal{Q}$ mit $|\mathcal{Q}| = 29$ und $\mathcal{Q} \leq T$. Es gilt $|T/\mathcal{Q}| = 2$, und es existiert eine $S = \mathrm{Syl}_2(N_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q})$ mit $T/\mathcal{Q} \leq S$. Innerhalb $N_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q}$ sind alle Sylow-Gruppen konjugiert. Es folgt dann, daß alle $W/\mathcal{Q}$, mit $|W| = |T|$ und $\mathcal{Q} \leq W$ konjugiert sind zu $T/\mathcal{Q}$ innerhalb $N_G(\mathcal{Q})/\mathcal{Q}$. Also sind alle Untergruppen der Ordnung 2.29 die $\mathcal{Q}$ enthalten, konjugiert in $N_G(\mathcal{Q})$. Ab jetzt ist es wie oben.

p=59

Die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung 59 beläuft sich auf 60. Es ist klar, daß $N_G(\mathcal{P})/C_G(\mathcal{P}) \hookrightarrow Z_{58}$, und daher $|N_G(\mathcal{P})| = 2.59^2$ für $|\mathcal{P}| = 59$. Alle Untergruppen der Ordnung 59 sind also konjugiert in G. Mit dem Hallschen Satz kann man wieder zeigen, daß Untergruppen der Ordnung 2.59 zu einander konjugiert sind in G. Damit sind alle Untergruppen von G untersucht worden.

Dieses ergibt Hauptsatz 3.3.5. $\|$

Ohne weiteren Beweis geben wir nun schließlich die Liste mit der Länge der Klassen der konjugierten Untergruppen H von $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_p \times Z_p)$ für $p \in \{11, 19, 29, 59\}$.

$H : p \nmid \|H\|$		$H : p \,\|\, \|H\|$			$H : p^2 \mid \|H\|$	
Ordnung	Zahl/p^2	p	Ordnung	Zahl	Ordnung/p^2	Zahl
1	1	11	11	$2^2.2$	1	1
2	1		22	$2^2.3$	2	1
3	10		55	$2^2.3.11$	3	10
4	15		110	$2^2.3.11$	4	15
5	6	19	19	$2^2.5$	6	10
6	10		38	$2^2.5.19$	6	10
8	5		57	$2^2.5.19$	8	5
10	6		114	$2^2.5.19$	10	6
12	10	29	29	$2.3.5$	12	10
20	6		58	$2.3.5.29$	20	6
24	5		116	$2.3.5.29$	24	5
120	1	59	59	$2^2.3.5$	120	1
			118	$2^2.3.5.59$		

3.3.d Die Fälle (v) und (vii) des Satzes 3.3.1

Wir müßen noch zeigen, daß das Lemma 3.3.6 auch für die B-Gruppen G aus dem Satz 3.3.1 (v) und (vii) richtig sei, d.h. zu zeigen ist, daß der p-Anteil der Gruppe $C_G(P)$ für jede $P \leq G$ mit $|P| = p$ genau der Gruppe $Z_p \times Z_p$ ($p = 29$ bzw. $p = 59$) entspricht. Den Beweis dieser Behauptung kann man jedoch fast wörtlich aus dem Beweis des Lemmas 3.3.6 entnehmen.

Nun aber gilt auch die Umkehrung. Genauer behaupten wir und beweisen die Sätze 3.3.7, 3.3.8, 3.3.9 und das Korollar 3.3.10.

Damit ist dann endgültig erklärt, daß die Notwendigkeit der Strukturen der B-Gruppen des Satzes 3.3.1 auch Bedingungen ergibt damit derartige Gruppen B-Gruppen sind.

Satz 3.3.7
Sei $G = HCU$ mit $U \triangleleft G$ und $U \cong C_{29} \times C_{29}$, $H \cong \mathrm{SL}(2,5)$, und $C = \langle c \rangle$ der Ordnung 7. Man nehme an, daß $[H, C] = 1$ und daß $t^c = t^{16}$ für jede $t \in U$. Falls H nicht in $C_G(U)$ enthalten ist, so folgt, daß G eine B-*Gruppe ist.*

Beweis
Man beachte, daß $H = [H, H]$. Daraus ist es nicht schwer zu sehen, daß die Konjugationswirkung von H auf U eine irreduzible ist. Seien nun L und $\tilde{L}$ Untergruppen von G gleicher Ordnung. Wir haben entweder 1) $L \cap U = U$ oder 2) $L \cap U = \{1\}$ oder 3) $D := L \cap U$ mit $D \cong C_{29}$.

Ad 1)
Es gilt, daß $\tilde{L}$ genau eine Sylow 29-Untergruppe besitzt, nämlich U. Weil $HC \cong G/U$ und HC eine B-Gruppe ist ([**11**], Lemma 3), schließen wir, daß $L/U \sim_{G/U} \tilde{L}/U$, also, daß $L \sim_G \tilde{L}$.

Ad 2)
Ganz analog zur Bemerkung 2) im Beweis des Hauptsatzes 3.3.5.

Ad 3)
In $\tilde{L}$ steckt eine normale Sylow 29-Untergruppe. Betrachte HU. Wir beweisen kurz, daß HU eine B-Gruppe ist. Nehmen wir an, $HU \notin \mathcal{B}$. Dann gibt die irreduzible Wirkung von H auf U im Zusammenhang mit Hauptsatz 3.3.5, daß die einzelne Involution τ von H trivial auf D wirkt. Also wirkt $H/\langle\tau\rangle$, mit $H/\langle\tau\rangle \cong A_5$, treu auf U. Es folgt $A_5 \hookrightarrow \mathrm{GL}(2, 29)$, d.h. daraus schließt man $A_5 \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, 29)$. Laut ([**6**], II.8.10 Satz) sind die Sylow 2-Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, 29)$ (verallgemeinert) quaternion, aber die

von A_5 sind elementar abelsch der Ordnung 4. Also ist HU tatsachlich eine B-Gruppe. Deswegen sind alle Untergruppen von HU der Ordnung 29 zu einander konjugiert in HU, und es gibt dann $\alpha \in HU$ mit $D = (\tilde{L} \cap U)^{\alpha}$. Wir haben also, daß $\langle L, \tilde{L}^{\alpha} \rangle \leq N_G(D)$. Nun wissen wir schon, daß $N_G(D)/C_G(D)$ eine zyklische Gruppe ist, deren Ordnung 28 teilt. Wir sehen, daß $C_G(D)/U \leq G/U$ wobei $G/U \cong H \times C$. Es folgt dann, daß $C_G(D) \leq H$ weil $(|H|, |C|) = 1$ und $t^c = t^{16}$ für jede $t \in U$. Aber dann, weil HU eine B-Gruppe ist, gibt Lemma 3.3.6 $C_G(D) = U$. Daher ist die Gruppe $N_G(D)/D$ auflösbar mit allen Sylowuntergruppen zyklisch; es ist also eine B-Gruppe ([**10**], Theorem 11). Es folgt also, daß $\tilde{L}^{\alpha}/D \sim_{N_G(D)/D} L/D$, d.h. $L \sim_{N_G(D)} \tilde{L}^{\alpha}$. Insgesamt ergibt sich, daß $L \sim_G \tilde{L}$. ‖

Satz 3.3.8
Sei $G = HCU$ mit $U \lhd G$ und $U \cong C_{59} \times C_{59}, H \cong \mathrm{SL}(2,5)$, und $C = \langle c \rangle$ der Ordnung 29. Man nehme an, daß $[H, C] = 1$ und daß $t^c = t^4$ für jede $t \in U$. Falls H nicht in $C_G(U)$ enthalten ist, so folgt, daß G eine B-*Gruppe ist.*

Beweis
Man übernehme den Beweis des Satzes 3.3.7 versehen mit den geeigneten Änderungen. ‖

Satz 3.3.9
Sei $G = H\tilde{C}U$ mit $U \lhd G$ und $U \cong C_{29} \times C_{29}$, $H \cong \mathrm{SL}(2,5)$, und $\tilde{C}$ eine B-*Gruppe derart, daß $\tilde{C} = \bar{C}\langle c \rangle$ mit $|c| = 7^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $c^7 \in \bar{C}$, $[\bar{C}, HU] = 1$, $\bar{C}^c = \bar{C}$. Man nehme an, daß $t^c = t^{16}$ für jede $t \in U$, daß $[\langle c \rangle, H] = 1$ und daß $(|\bar{C}|, |HU|) = 1$. Dann ist G eine* B-*Gruppe falls $H \not\leq C_G(U)$.*

Beweis
Seien L und $\tilde{L}$ Untergruppen von G gleicher Ordnung. Dann gilt entweder 1) $L \cap U = U = \tilde{L} \cap U$ oder 2) $L \cap U = \{1\} = \tilde{L} \cap U$ oder 3) $D := L \cap U$ mit $D \cong C_{29}$.

Ad 1)
Wir haben, daß $G/U \cong H \times \tilde{C}$ mit $(|H|, |\tilde{C}|) = 1$ und daher ist unsere Gruppe G/U eine B-Gruppe laut ([**11**], Lemma 3). Also $L/U \sim_{G/U} \tilde{L}/U$, und $L \sim_G \tilde{L}$ folgt.

Ad 2)
Ganz analog zur Bemerkung 2) im Beweis des Hauptsatzes 3.3.5.

Ad 3)
In $\tilde{L}$ steckt eine normale Sylow 29-Untergruppe. Genau wie im Beweis des Satzes 3.3.7 folgt schon, daß HU eine B-Gruppe ist. Deswegen sind alle

Untergruppen von HU der Ordnung 29 in HU zu einander konjugiert, und es gibt dann $\alpha \in HU$ mit $D = (\tilde{L} \cap U)^\alpha$. Also $\langle L, \tilde{L}^\alpha \rangle \leq N_G(D)$. Es gilt nun $|HU : N_{HU}(D)| = 30 = |G : N_G(D)|$. Bemerke, daß $N_G(D)$ eine auflösbare Gruppe ist und daß $N_G(D)/D$ zyklische Sylow t-Untergruppen hat für jedes $t \in \{2, 29, 7\}$.

Für $t = 2$ folgt dies aus $HU/U \cong \mathrm{SL}(2,5)$; für $t = 29$ ist es klar; für $t = 7$ folgt es aus $\bar{C} \lhd \tilde{C}$, $|\tilde{C}/\bar{C}| = 7$ in Zusammenhang mit [**11**], Seite 398. Wir erwähnen jetzt die Betrachtungen in [**10**], Seite 251, nämlich, daß das Produkt V aller nicht-zyklischen Sylowuntergruppen der auflösbaren B-Gruppe $\tilde{C}$ in der Fittinggruppe $F(\tilde{C})$ enthalten ist, und wir schließen insbesondere, daß diejenigen Sylowgruppen in $\bar{C}$ liegen. Es gilt übrigens $\bar{C} \trianglelefteq N_G(D)$. Nun beachte man $N_G(D)/D$. Die Fittinggruppe $F(N_G(D)/D)$ enthält VD/D, wobei VD/D auch dem Produkt der nicht-zyklischen Sylowuntergruppen von $N_G(D)/D$ gleich ist; tatsächlich gilt $VD/D \trianglelefteq F(D\tilde{C}/D)$ weil $D\bar{C}/G \trianglelefteq N_G(D)/D$ und $[D\bar{C}/D,\ N_{HU}(D)/D] = 1$. Also $F(N_G(D)/D) = X(VD/D)$ mit X zyklisch und $[X,\ VD/D] = 1$. Weil $D\tilde{C}/D$ eine B-Gruppe ist, so folgt also, daß je zwei Untergruppen gleicher Ordnung von $F(N_G(D)/D)$ zu einander in $N_G(D)/D$ konjugiert sind. Alle Sylowgruppen von $(N_G(D)/D)\ /\ F(N_G(D)/D)$ sind offenbar zyklisch. Die letzten zwei Eigenschaften ergeben, laut ([**10**], Theorem 11), daß $N_G(D)/D$ eine B-Gruppe ist. Es gilt also, daß $L/D \sim_{N_G(D)/D} \tilde{L}^\alpha/D$, und dann $L \sim_G \tilde{L}^\alpha$. Schließlich folgt $L \sim_G \tilde{L}$.

Der Beweis ist damit vollständig. $\|$

Korollar 3.3.10
Man ändere in den Hypothesen des Satzes 3.3.9 nun systematisch 29 *in* 59, 7 *in* 29, 16 *in* 4. *Dann ist die zugehörige Gruppe G eine* B-*Gruppe.*

Beweis
Man folge dem Beweis des Satzes 3.3.9 unter Rücksicht auf die numerischen Änderungen; man beachte, daß $|HU/N_{HU}(D)| = 60 = |G : N_G(D)|$ und $|N_{HU}(D)/U| = 2$. $\|$

3.4 Schlußfolgerung

Mit Hilfe eines theoretischen Beweises und mit Hilfe von GAP hat es sich gezeigt, daß die Gruppen, die wir erforscht haben, alle in $\mathcal{B}$ liegen. GAP war bei diesem Beispiel ein sehr zweckmäßiges Hilfsmittel für die Unterstützung der Gedankenführung. Zum Abschluß sei noch folgendes vermerkt. Ohne Zweifel kann leicht theoretisch bewiesen werden, daß die drei Ausnahme-strukturen zu Teil 3) des Satzes 3.2.1 jeweils eine B-Gruppe liefern, falls $C_G(M) = M$, genau wie es für die Gruppen im Hauptsatz 3.3.5 getan worden ist. Das umgeht die Frage, ob zwei Gruppen gleicher Ordnung aus Teil 3) des Satzes 3.2.1 immer isomorph sind. Diese Fragen kann man sich auch für Gruppen des Hauptsatzes 3.3.5 stellen. Das Isomorphieproblem wurde gelöst, siehe ([**13**], IV(7.4)). Es stellt sich heraus, daß alle Gruppen in Satz 3.2.1, Teil 3), mit $C_G(M) = M$, sowie alle Gruppen in Satz 3.3.1 mit $H = 1$, schon durch ihre Ordnung, bis auf Isomorphie, festliegen.

Literaturverzeichnis

[1] Brauer, R. – On Artin L-series with general group characters, Ann. of Math., **48**(1947), 502–514;

On the zeta-functions of algebraic number fields, American J. of Math., **69**(1947), 243–250 und **72**(1950), 739–746.

[2] Brauer, R.–A note on zeta-functions of algebraic number fields, Acta Arithmetica **24**(1973), 325–327.

[3] Conway, J.H. et alii – ATLAS of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[4] Djokovič, D.Z.; Malzan J.– Imprimitive irreducible complex characters of the alternating group, Can. J. Math., **28**(1976), 1199–1204.

[5] Hecke, E. – Mathematische Werke, (Papers 7,9 und 12), Vandenhoeck und Ruprecht, Götingen, 1959.

[6] Huppert, B. – Endliche Gruppen I, Springer Verlag, Berlin, 1967.

[7] Isaacs, I.M. – Character theory of finite groups, Acad. Press, New York, 1976.

[8] Lang, S. – Algebraic Number Theory, Addison-Wesley Publishing co., inc., Reading, Massachusetts etc., 1970.

[9] Waall, R.W. van der – On n-isoclinic embedding of groups, Journ. of Pure and Applied algebra, **52**(1988), 165–171.

[10] Waall, R.W. van der – Finite groups whose subgroups of equal order are conjugate, Indag. Math., **4**(1993), 239–254.

[11] Waall, R.W. van der; Bensaïd, A.– Nonsolvable finite groups whose subgroups of equal order are conjugate, Indag. Math., **1**(1990), 397–408.

[12] Waall, R.W. van der; Sato, K. – On a problem of R. Brauer for quotients of Dedekind-zeta-functions, Indag. Math., **4**(1993), 99–109.

[13] Wähling, H. – Theorie der Fastkörper, Thales Verlag, Essen, 1987.

Anhang

In diesem Anhang sind nicht nur die schon vorher angekündigte Erläuterungen zu den Gruppen 48.50, $\mathrm{GL}(3,2)$, A_6 und $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$, aufgelistet sondern auch noch etwas mehr. Wenn ferner von einem monomialen Charakter die Rede ist, so ist gemeint, daß dieser den trivialen Charakter nicht als Konstituent enthält. Insgesamt handelt es sich um

1. die Gruppe 48.50, namentlich die Menge M aller monomialen Charakteren, die Liste der Chi-Charakteren und die Liste deren Zerlegung als Summe von Charakteren aus M, den Untergruppenverband;
2. die Gruppe $\mathrm{GL}(3,2)$, namentlich die Charaktertafel, die Menge aller monomialen Charakteren sowie ein Erzeugendensystem C derentwegen, eine Zerlegung der Chi-Charakteren als Summe von Charakteren aus C falls möglich, die Menge der Klassen der konjugierten Untergruppen, Eigenschaften der sonstigen Chi-Charakteren 15, 25, 35, 45, 56 und 57;
3. die Gruppe A_6, namentlich ein Erzeugendensystem C von monomialen Charakteren, eine Zerlegung von 164 Chi-Charakteren als Summe von Charakteren aus C, Einzelheiten über Chi_{165}, die restlichen Chi-Charakteren mit ihren Herkunft-Gruppen H und T;
4. die Anfertigung und Ausarbeitung einer kurzen Permutationspräsentierung von $\mathrm{SL}(2,5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ in GAP, Konjugiertenklassen;
5. die Gruppe $(\mathrm{SL}(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$: eine Präsentierung und Einzelheiten der Konjugiertenklassen.

Tafeln und Beispiele

1 Zur Zerlegung von Chi in monomiale Charaktere

1.1 K = 48.50

Die monomialen Charaktere von K

Es folgt die Liste der monomialen Charaktere von K, dargestellt als Summe von irreduziblen Charakteren von K.

Nummer		In irreduzible
μ_1	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]
μ_2	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2]
μ_3	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_4	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
μ_5	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
μ_6	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 0]
μ_7	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1]
μ_8	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1]
μ_9	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 1]
μ_{10}	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 2]
μ_{11}	=	[0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 0 , 0 , 4]
μ_{12}	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{13}	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
μ_{14}	=	[0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1]
μ_{15}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{16}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_{17}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{18}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_{19}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
μ_{20}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 1 , 2 , 0]
μ_{21}	=	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{22}	=	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite		
Nummer		In irreduzible
μ_{23}	=	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{24}	=	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_{25}	=	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
μ_{26}	=	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 2 , 1 , 0]
μ_{27}	=	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{28}	=	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
μ_{29}	=	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 2]
μ_{30}	=	[1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{31}	=	[1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
μ_{32}	=	[1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 3 , 3 , 0]
μ_{33}	=	[1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 3 , 4]

Die Chi-Charaktere von K

Nummer		In irreduzible
Chi_1	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
Chi_2	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
Chi_3	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 2 , 0]
Chi_4	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 3 , 0]
Chi_5	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_6	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
Chi_7	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
Chi_8	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1 , 2 , 0]
Chi_9	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 2 , 1 , 0]
Chi_{10}	=	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 2 , 2 , 0]
Chi_{11}	=	[0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 0 , 1 , 2]
Chi_{12}	=	[0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 1 , 2 , 2]
Chi_{13}	=	[0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 2 , 1 , 2]
Chi_{14}	=	[0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2]
Chi_{15}	=	[0 , 0 , 2 , 0 , 0 , 1 , 2 , 0]
Chi_{16}	=	[0 , 0 , 2 , 2 , 2 , 1 , 2 , 2]
Chi_{17}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_{18}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
Chi_{19}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 2 , 0]
Fortsetzung auf nächster Seite		

Fortsetzung von voriger Seite		
Nummer		In irreduzible
Chi_{20}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
Chi_{21}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
Chi_{22}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 2 , 0]
Chi_{23}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 3 , 0]
Chi_{24}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 0]
Chi_{25}	=	[0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 3 , 1 , 0]
Chi_{26}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 2 , 0]
Chi_{27}	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 2 , 2 , 0]

Die Zerlegung der Chi-Charaktere in monomiale Charaktere für die Gruppe 48.50

Chi		In monomiale
Chi_1	=	μ_3
Chi_2	=	μ_5
Chi_3	=	$\mu_3 + \mu_5$
Chi_4	=	$\mu_3 + \mu_6$
Chi_5	=	μ_{12}
Chi_6	=	$\mu_3 + \mu_{12}$
Chi_7	=	$\mu_4 + \mu_{12}$
Chi_8	=	$\mu_3 + \mu_{13}$
Chi_9	=	$\mu_4 + \mu_{13}$
Chi_{10}	=	$\mu_5 + \mu_{13}$
Chi_{11}	=	$\mu_3 + 2.\mu_9 + \mu_{12}$
Chi_{12}	=	$\mu_3 + 2.\mu_9 + \mu_{13}$
Chi_{13}	=	$\mu_4 + 2.\mu_9 + \mu_{13}$
Chi_{14}	=	$\mu_6 + 2.\mu_9 + \mu_{12}$
Chi_{15}	=	$\mu_3 + \mu_{12} + \mu_{13}$
Chi_{16}	=	$\mu_3 + \mu_9 + \mu_{12} + \mu_{14}$
Chi_{17}	=	μ_{15}
Chi_{18}	=	μ_{16}
Chi_{19}	=	$\mu_3 + \mu_{16}$
Chi_{20}	=	$\mu_4 + \mu_{15}$
Chi_{21}	=	$\mu_5 + \mu_{15}$
Fortsetzung auf nächster Seite		

Fortsetzung von voriger Seite		
Chi		In monomiale
Chi_{22}	$=$	$\mu_5 + \mu_{16}$
Chi_{23}	$=$	$\mu_3 + \mu_5 + \mu_{16}$
Chi_{24}	$=$	$\mu_6 + \mu_{15}$
Chi_{25}	$=$	$\mu_4 + \mu_4 + \mu_4 + \mu_{16}$
Chi_{26}	$=$	$\mu_3 + \mu_{18}$
Chi_{27}	$=$	$\mu_6 + \mu_{17}$

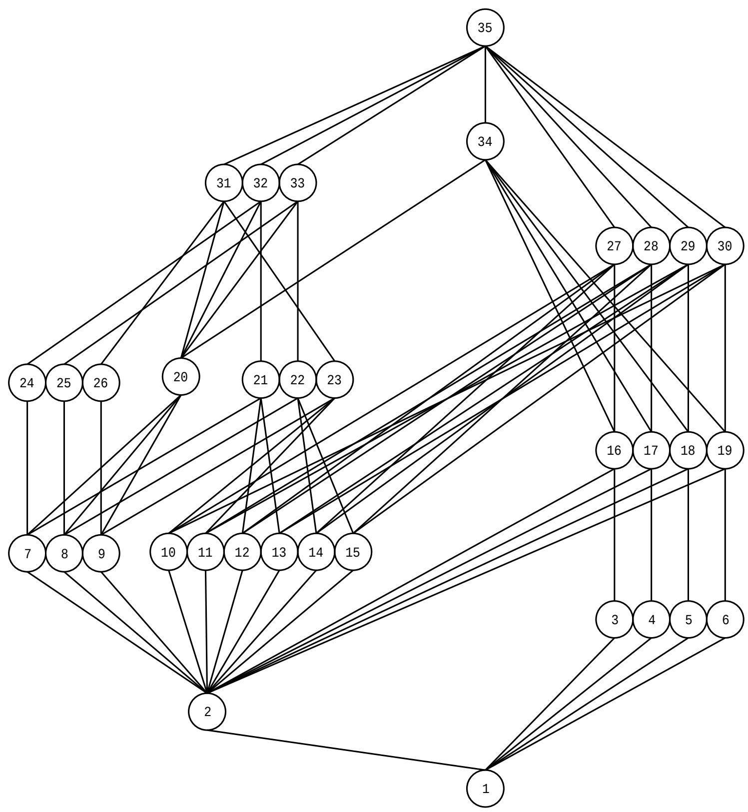

Abbildung 1: Der Untergruppenverband der Gruppe 48.50.

1.2 GL(3,2)

Die Charaktertafel von GL(3,2) lautet:

	1a	2a	3a	4a	7a	7b
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	.	1	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$
χ_3	3	-1	.	1	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$
χ_4	6	2	.	.	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	.	.
χ_6	8	.	-1	.	1	1

Die monomialen Charaktere von GL(3,2)

Nun folgt die Liste der monomialen Charaktere von GL(3,2), dargestellt als Summe von irreduziblen Charakteren von GL(3,2).

Nummer		In irreduzible
μ_1	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]
μ_2	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_3	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1]
μ_4	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 1]
μ_5	=	[0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 2]
μ_6	=	[0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 1]
μ_7	=	[0 , 1 , 0 , 1 , 1 , 1]
μ_8	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 1 , 1]
μ_9	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 2 , 1]
μ_{10}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2]
μ_{11}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 2 , 3]
μ_{12}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 4 , 4]
μ_{13}	=	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
μ_{14}	=	[1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0]
μ_{15}	=	[1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 2]
μ_{16}	=	[1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0]
μ_{17}	=	[1 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0]
μ_{18}	=	[1 , 0 , 0 , 2 , 0 , 1]
μ_{19}	=	[1 , 0 , 0 , 2 , 1 , 1]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite		
Nummer		In irreduzible
μ_{20}	=	[1 , 0 , 0 , 3 , 1 , 2]
μ_{21}	=	[1 , 1 , 1 , 2 , 1 , 2]
μ_{22}	=	[1 , 1 , 1 , 2 , 3 , 2]
μ_{23}	=	[1 , 1 , 1 , 4 , 3 , 4]
μ_{24}	=	[1 , 3 , 3 , 6 , 7 , 8]

Ein Erzeugendensystem C von monomialen Charakteren der Gruppe GL(3,2) wird gegeben von:

$$\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_6, \mu_7, \mu_8\}$$

Jetzt folgt die Liste der *Chi*-Charaktere von GL(3,2). Von jedem *Chi* wird die Zerlegung in die monomialen Charaktere aus C angegeben.

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_1	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_2	=	[0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1]	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0]
Chi_3	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 2]	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0]
Chi_4	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 2]	[1 , 1 , 1 , 0 , 0 , 0]
Chi_5	=	[0 , 0 , 0 , 1 , 2 , 2]	[1 , 2 , 1 , 0 , 0 , 0]
Chi_6	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 1 , 1]	[0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]
Chi_7	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 1 , 2]	[1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1]
Chi_8	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 2 , 2]	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1]
Chi_9	=	[0 , 1 , 1 , 0 , 3 , 2]	[1 , 2 , 0 , 0 , 0 , 1]
Chi_{10}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 1 , 2]	[0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1]
Chi_{11}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 1 , 3]	[1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 1]
Chi_{12}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2]	[0 , 1 , 1 , 0 , 0 , 1]
Chi_{13}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 3]	[1 , 1 , 1 , 0 , 0 , 1]
Chi_{14}	=	[0 , 1 , 1 , 1 , 3 , 3]	[1 , 2 , 1 , 0 , 0 , 1]
Chi_{15}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 1 , 2]	[-v , v-1 , 2v , 1-v , 1-v , v]
Chi_{16}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 1 , 4]	[1 , 0 , 2 , 0 , 0 , 1]
Chi_{17}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 2 , 4]	[1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 1]
Chi_{18}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 4]	[1 , 2 , 2 , 0 , 0 , 1]
Chi_{19}	=	[0 , 1 , 1 , 2 , 5 , 4]	[1 , 4 , 2 , 0 , 0 , 1]
Chi_{20}	=	[0 , 2 , 2 , 0 , 3 , 3]	[1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 2]
Fortsetzung auf nächster Seite			

Fortsetzung von voriger Seite

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{21}	=	[0 , 2 , 2 , 0 , 4 , 3]	[1 , 2 , 0 , 0 , 0 , 2]
Chi_{22}	=	[0 , 2 , 2 , 1 , 3 , 4]	[1 , 1 , 1 , 0 , 0 , 2]
Chi_{23}	=	[0 , 2 , 2 , 1 , 4 , 4]	[1 , 2 , 1 , 0 , 0 , 2]
Chi_{24}	=	[0 , 2 , 2 , 1 , 5 , 4]	[1 , 3 , 1 , 0 , 0 , 2]
Chi_{25}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 3 , 2]	[-v, v-1, 2v-2, 2-v, 2-v, v]
Chi_{26}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 3 , 4]	[0 , 1 , 2 , 0 , 0 , 2]
Chi_{27}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 3 , 5]	[1 , 1 , 2 , 0 , 0 , 2]
Chi_{28}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 4 , 5]	[1 , 2 , 2 , 0 , 0 , 2]
Chi_{29}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 5 , 5]	[1 , 3 , 2 , 0 , 0 , 2]
Chi_{30}	=	[0 , 2 , 2 , 2 , 6 , 5]	[1 , 4 , 2 , 0 , 0 , 2]
Chi_{31}	=	[0 , 2 , 2 , 3 , 3 , 6]	[1 , 1 , 3 , 0 , 0 , 2]
Chi_{32}	=	[0 , 2 , 2 , 3 , 4 , 6]	[1 , 2 , 3 , 0 , 0 , 2]
Chi_{33}	=	[0 , 2 , 2 , 3 , 5 , 6]	[1 , 3 , 3 , 0 , 0 , 2]
Chi_{34}	=	[0 , 2 , 2 , 3 , 6 , 6]	[1 , 4 , 3 , 0 , 0 , 2]
Chi_{35}	=	[0 , 2 , 2 , 4 , 3 , 4]	[-v-1, v, 2v+2, 1-v, 1-v,v+1]
Chi_{36}	=	[0 , 2 , 2 , 4 , 3 , 6]	[0 , 1 , 4 , 0 , 0 , 2]
Chi_{37}	=	[0 , 2 , 2 , 4 , 5 , 4]	[0 , 1 , 0 , 2 , 2 , 0]
Chi_{38}	=	[0 , 2 , 2 , 4 , 5 , 6]	[0 , 3 , 4 , 0 , 0 , 2]
Chi_{39}	=	[0 , 3 , 3 , 0 , 5 , 4]	[1 , 2 , 0 , 0 , 0 , 3]
Chi_{40}	=	[0 , 3 , 3 , 1 , 5 , 5]	[1 , 2 , 1 , 0 , 0 , 3]
Chi_{41}	=	[0 , 3 , 3 , 1 , 6 , 5]	[1 , 3 , 1 , 0 , 0 , 3]
Chi_{42}	=	[0 , 3 , 3 , 2 , 5 , 6]	[1 , 2 , 2 , 0 , 0 , 3]
Chi_{43}	=	[0 , 3 , 3 , 2 , 6 , 6]	[1 , 3 , 2 , 0 , 0 , 3]
Chi_{44}	=	[0 , 3 , 3 , 2 , 7 , 6]	[1 , 4 , 2 , 0 , 0 , 3]
Chi_{45}	=	[0 , 3 , 3 , 3 , 5 , 4]	[-v, v, 2v-1, 2-v, 2-v, v+1]
Chi_{46}	=	[0 , 3 , 3 , 3 , 5 , 6]	[0 , 2 , 3 , 0 , 0 , 3]
Chi_{47}	=	[0 , 3 , 3 , 3 , 5 , 7]	[1 , 2 , 3 , 0 , 0 , 3]
Chi_{48}	=	[0 , 3 , 3 , 3 , 6 , 7]	[1 , 3 , 3 , 0 , 0 , 3]
Chi_{49}	=	[0 , 3 , 3 , 4 , 5 , 5]	[0 , 0 , 0 , 2 , 2 , 1]
Chi_{50}	=	[0 , 3 , 3 , 4 , 5 , 7]	[0 , 2 , 4 , 0 , 0 , 3]
Chi_{51}	=	[0 , 3 , 3 , 4 , 5 , 8]	[1 , 2 , 4 , 0 , 0 , 3]
Chi_{52}	=	[0 , 3 , 3 , 4 , 6 , 5]	[0 , 1 , 0 , 2 , 2 , 1]
Chi_{53}	=	[0 , 3 , 3 , 4 , 6 , 7]	[0 , 3 , 4 , 0 , 0 , 3]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite			
Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{54}	=	[0 , 3 , 3 , 5 , 5 , 6]	[0 , 0 , 1 , 2 , 2 , 1]
Chi_{55}	=	[0 , 3 , 3 , 5 , 6 , 6]	[0 , 1 , 1 , 2 , 2 , 1]
Chi_{56}	=	[0 , 3 , 3 , 6 , 5 , 4]	[-v-2, v-1, 2v, 3-v, 3-v, v]
Chi_{57}	=	[0 , 3 , 3 , 6 , 5 , 6]	[v, -v-1, -2v, v+3, v+3, -v]

Die Liste der Klassen von konjugierten Untergruppen von GL(3,2) sieht so aus.

Klasse	Länge der Klasse	Ordnung	Typus der Untergruppe
1	1	1	C_1
2	21	2	C_2
3	28	3	C_3
4	7	4	$C_2 \times C_2$
5	7	4	$C_2 \times C_2$
6	21	4	C_4
7	28	6	D_6, S_3
8	8	7	C_7
9	21	8	D_8
10	7	12	A_4
11	7	12	A_4
12	8	21	$7:3$
13	7	24	S_4
14	7	24	S_4
15	1	168	$GL(3,2)$

Für die sechs *Chi*-Charaktere welche nicht zerlegbar in monomiale sind, folgt nun die Herkunft: bei jedem Charakter wird die Klasse der Gruppe H, die Klasse der Gruppe T und die Klasse des Schnitts $H \cap T$ angegeben.

Chi	Klasse der H	Klasse der T	Klasse der $H \cap T$
Chi_{15}	12	12	3
Chi_{25}	8	2	1
Chi_{35}	8	3	1
Chi_{45}	8	4	1
Chi_{56}	8	8	1
Chi_{57}	12	8	1

1.3 A_6

Ein gewisses GSM-System C für A_6

$$
\begin{array}{lclclcl}
\mu_1 & = & [\,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,] & \mu_2 & = & [\,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,0\,,2\,] \\
\mu_3 & = & [\,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,1\,,2\,] & \mu_4 & = & [\,0\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,1\,] \\
\mu_5 & = & [\,0\,,0\,,1\,,1\,,1\,,1\,,0\,] & \mu_6 & = & [\,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,2\,] \\
\mu_7 & = & [\,0\,,1\,,0\,,1\,,1\,,1\,,0\,] & \mu_8 & = & [\,0\,,1\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0\,] \\
\mu_9 & = & [\,0\,,1\,,1\,,1\,,2\,,2\,,2\,] & \mu_{10} & = & [\,0\,,1\,,1\,,2\,,1\,,2\,,2\,]
\end{array}
$$

Die Chi-Charaktere von A_6

Jetzt folgen, in Schichten, die *Chi*-Charaktere von A_6. Erstens werden die 164 Charaktere erwähnt die MON-$\mathbb{N}$-C sind, das heißt: diese Charaktere sind zerlegbar als nicht-negative Summe von monomialen Charakteren aus C.

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_1	=	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_2	=	[0, 0, 0, 1, 1, 0, 2]	[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_3	=	[0, 0, 0, 1, 1, 0, 3]	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_4	=	[0, 0, 0, 1, 1, 1, 3]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_5	=	[0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]	[1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_6	=	[0, 0, 1, 2, 2, 1, 2]	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_7	=	[0, 0, 1, 2, 2, 1, 3]	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_8	=	[0, 0, 1, 2, 2, 2, 2]	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_9	=	[0, 0, 1, 2, 2, 2, 3]	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{10}	=	[0, 0, 1, 3, 3, 2, 5]	[1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{11}	=	[0, 0, 2, 3, 3, 2, 3]	[1, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{12}	=	[0, 0, 2, 3, 3, 3, 3]	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{13}	=	[0, 0, 2, 4, 4, 3, 5]	[1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{14}	=	[0, 0, 3, 4, 4, 3, 3]	[1, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{15}	=	[0, 0, 3, 5, 5, 4, 5]	[1, 1, 1, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{16}	=	[0, 0, 4, 6, 6, 5, 5]	[1, 1, 1, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0]
Chi_{17}	=	[0, 1, 0, 1, 1, 1, 1]	[1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{18}	=	[0, 1, 0, 2, 2, 1, 2]	[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{19}	=	[0, 1, 0, 2, 2, 1, 3]	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{20}	=	[0, 1, 0, 2, 2, 2, 2]	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite			
Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{21}	=	[0, 1, 0, 2, 2, 2, 3]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{22}	=	[0, 1, 0, 3, 3, 2, 5]	[1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{23}	=	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1]	[0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{24}	=	[0, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	[1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{25}	=	[0, 1, 1, 2, 2, 1, 3]	[0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{26}	=	[0, 1, 1, 2, 2, 1, 4]	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Chi_{27}	=	[0, 1, 1, 2, 2, 2, 1]	[1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{28}	=	[0, 1, 1, 2, 2, 2, 4]	[4, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{29}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 2, 3]	[1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{30}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 2, 4]	[2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{31}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 2, 6]	[0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
Chi_{32}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 3, 3]	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{33}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 3, 4]	[2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{34}	=	[0, 1, 1, 3, 3, 3, 6]	[1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{35}	=	[0, 1, 1, 4, 4, 3, 4]	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{36}	=	[0, 1, 1, 4, 4, 3, 6]	[2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{37}	=	[0, 1, 1, 4, 4, 3, 8]	[4, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{38}	=	[0, 1, 2, 2, 2, 1, 2]	[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]
Chi_{39}	=	[0, 1, 2, 2, 2, 2, 2]	[1, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{40}	=	[0, 1, 2, 3, 3, 2, 3]	[0, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{41}	=	[0, 1, 2, 3, 3, 2, 4]	[1, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{42}	=	[0, 1, 2, 3, 3, 3, 4]	[4, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{43}	=	[0, 1, 2, 4, 4, 3, 4]	[2, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{44}	=	[0, 1, 2, 4, 4, 3, 6]	[4, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{45}	=	[0, 1, 2, 4, 4, 4, 3]	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{46}	=	[0, 1, 2, 4, 4, 4, 6]	[4, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{47}	=	[0, 1, 2, 5, 5, 4, 5]	[1, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{48}	=	[0, 1, 2, 5, 5, 4, 8]	[4, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{49}	=	[0, 1, 3, 4, 4, 3, 3]	[0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{50}	=	[0, 1, 3, 4, 4, 3, 4]	[1, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 0, 0, 0]
Chi_{51}	=	[0, 1, 3, 5, 5, 4, 6]	[4, 1, 0, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{52}	=	[0, 1, 3, 5, 5, 5, 6]	[0, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0]
Chi_{53}	=	[0, 1, 3, 6, 6, 5, 4]	[0, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0]
Fortsetzung auf nächster Seite			

Fortsetzung von voriger Seite

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{54}	=	[0, 1, 3, 6, 6, 5, 6]	[2, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{55}	=	[0, 1, 3, 6, 6, 5, 8]	[4, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{56}	=	[0, 1, 4, 6, 6, 5, 6]	[4, 1, 0, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{57}	=	[0, 1, 4, 6, 6, 6, 6]	[4, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{58}	=	[0, 1, 4, 7, 7, 6, 8]	[0, 1, 3, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 0]
Chi_{59}	=	[0, 1, 5, 8, 8, 7, 8]	[4, 1, 1, 0, 5, 0, 1, 0, 0, 0]
Chi_{60}	=	[0, 2, 0, 3, 3, 2, 3]	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{61}	=	[0, 2, 0, 3, 3, 3, 3]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{62}	=	[0, 2, 0, 4, 4, 3, 5]	[1, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{63}	=	[0, 2, 1, 2, 2, 1, 2]	[0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{64}	=	[0, 2, 1, 2, 2, 2, 2]	[1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{65}	=	[0, 2, 1, 3, 3, 2, 3]	[0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{66}	=	[0, 2, 1, 3, 3, 2, 4]	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{67}	=	[0, 2, 1, 3, 3, 3, 4]	[0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{68}	=	[0, 2, 1, 4, 4, 3, 4]	[2, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{69}	=	[0, 2, 1, 4, 4, 3, 6]	[0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{70}	=	[0, 2, 1, 4, 4, 4, 3]	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{71}	=	[0, 2, 1, 4, 4, 4, 6]	[0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{72}	=	[0, 2, 1, 5, 5, 4, 5]	[1, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{73}	=	[0, 2, 1, 5, 5, 4, 8]	[0, 1, 3, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{74}	=	[0, 2, 2, 3, 3, 2, 4]	[0, 1, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0]
Chi_{75}	=	[0, 2, 2, 3, 3, 3, 4]	[0, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0]
Chi_{76}	=	[0, 2, 2, 4, 4, 3, 4]	[1, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{77}	=	[0, 2, 2, 4, 4, 3, 6]	[0, 1, 1, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{78}	=	[0, 2, 2, 4, 4, 3, 7]	[0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{79}	=	[0, 2, 2, 4, 4, 5, 7]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{80}	=	[0, 2, 2, 5, 5, 4, 9]	[1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{81}	=	[0, 2, 2, 5, 5, 5, 9]	[1, 0, 3, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0]
Chi_{82}	=	[0, 2, 2, 6, 6, 5, 5]	[1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{83}	=	[0, 2, 2, 6, 6, 5, 7]	[0, 1, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{84}	=	[0, 2, 2, 6, 6, 5, 8]	[4, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{85}	=	[0, 2, 2, 6, 6, 5, 9]	[5, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{86}	=	[0, 2, 3, 5, 5, 4, 7]	[4, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 0]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{87}	=	[0, 2, 3, 5, 5, 6, 7]	[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{88}	=	[0, 2, 3, 6, 6, 5, 6]	[4, 1, 0, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{89}	=	[0, 2, 3, 6, 6, 5, 9]	[1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{90}	=	[0, 2, 3, 6, 6, 6, 6]	[0, 0, 3, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 0]
Chi_{91}	=	[0, 2, 3, 6, 6, 6, 9]	[7, 0, 1, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{92}	=	[0, 2, 3, 7, 7, 6, 7]	[0, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{93}	=	[0, 2, 3, 7, 7, 6, 8]	[4, 1, 1, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{94}	=	[0, 2, 3, 7, 7, 6, 9]	[5, 1, 1, 0, 3, 0, 2, 0, 0, 0]
Chi_{95}	=	[0, 2, 4, 6, 6, 5, 6]	[0, 1, 1, 0, 4, 2, 0, 0, 0, 0]
Chi_{96}	=	[0, 2, 4, 6, 6, 5, 7]	[4, 1, 0, 0, 4, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{97}	=	[0, 2, 4, 6, 6, 7, 7]	[1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{98}	=	[0, 2, 4, 7, 7, 6, 9]	[1, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{99}	=	[0, 2, 4, 7, 7, 7, 9]	[1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1]
Chi_{100}	=	[0, 2, 4, 8, 8, 7, 7]	[0, 1, 2, 0, 4, 1, 1, 0, 0, 0]
Chi_{101}	=	[0, 3, 0, 4, 4, 3, 3]	[1, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{102}	=	[0, 3, 0, 5, 5, 4, 5]	[1, 1, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{103}	=	[0, 3, 1, 4, 4, 3, 3]	[0, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 0]
Chi_{104}	=	[0, 3, 1, 4, 4, 3, 4]	[1, 1, 0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{105}	=	[0, 3, 1, 5, 5, 4, 6]	[0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0]
Chi_{106}	=	[0, 3, 1, 5, 5, 5, 6]	[0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0]
Chi_{107}	=	[0, 3, 1, 6, 6, 5, 4]	[0, 1, 1, 0, 1, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{108}	=	[0, 3, 1, 6, 6, 5, 6]	[2, 1, 1, 0, 1, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{109}	=	[0, 3, 1, 6, 6, 5, 8]	[0, 1, 3, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0]
Chi_{110}	=	[0, 3, 2, 5, 5, 4, 7]	[0, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0]
Chi_{111}	=	[0, 3, 2, 5, 5, 6, 7]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{112}	=	[0, 3, 2, 6, 6, 5, 6]	[4, 1, 0, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{113}	=	[0, 3, 2, 6, 6, 5, 9]	[7, 1, 0, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{114}	=	[0, 3, 2, 6, 6, 6, 6]	[4, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{115}	=	[0, 3, 2, 6, 6, 6, 9]	[1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{116}	=	[0, 3, 2, 7, 7, 6, 7]	[0, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 0]
Chi_{117}	=	[0, 3, 2, 7, 7, 6, 8]	[0, 1, 3, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0]
Chi_{118}	=	[0, 3, 2, 7, 7, 6, 9]	[5, 1, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{119}	=	[0, 3, 3, 4, 4, 3, 6]	[0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 0]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite

Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{120}	=	[0, 3, 3, 4, 4, 5, 6]	[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
Chi_{121}	=	[0, 3, 3, 5, 5, 4, 8]	[0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
Chi_{122}	=	[0, 3, 3, 5, 5, 5, 8]	[7, 0, 0, 0, 3, 1, 2, 0, 0, 0]
Chi_{123}	=	[0, 3, 3, 5, 5, 6, 8]	[4, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{124}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 5, 6]	[3, 1, 0, 0, 3, 1, 2, 0, 0, 0]
Chi_{125}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 5, 8]	[0, 1, 3, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 0]
Chi_{126}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 5, 9]	[0, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1]
Chi_{127}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 5, 10]	[0, 1, 3, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 0]
Chi_{128}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 6, 10]	[0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
Chi_{129}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 7, 6]	[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{130}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 7, 8]	[2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{131}	=	[0, 3, 3, 6, 6, 7, 10]	[0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
Chi_{132}	=	[0, 3, 3, 7, 7, 6, 8]	[0, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1]
Chi_{133}	=	[0, 3, 3, 7, 7, 6, 9]	[7, 1, 0, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{134}	=	[0, 3, 3, 7, 7, 7, 8]	[0, 0, 3, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 0]
Chi_{135}	=	[0, 3, 3, 8, 8, 7, 6]	[2, 1, 1, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{136}	=	[0, 3, 3, 8, 8, 7, 8]	[4, 1, 1, 0, 3, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{137}	=	[0, 3, 4, 6, 6, 5, 8]	[0, 1, 2, 0, 3, 2, 0, 1, 0, 0]
Chi_{138}	=	[0, 3, 4, 6, 6, 6, 8]	[7, 0, 0, 1, 3, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{139}	=	[0, 3, 4, 6, 6, 7, 8]	[1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1]
Chi_{140}	=	[0, 3, 4, 7, 7, 6, 9]	[0, 1, 2, 0, 4, 3, 0, 0, 0, 0]
Chi_{141}	=	[0, 3, 4, 7, 7, 6, 10]	[7, 1, 0, 1, 3, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{142}	=	[0, 3, 4, 8, 8, 7, 8]	[0, 1, 2, 0, 4, 2, 1, 0, 0, 0]
Chi_{143}	=	[0, 3, 4, 8, 8, 7, 9]	[7, 1, 0, 0, 4, 0, 3, 0, 0, 0]
Chi_{144}	=	[0, 4, 0, 6, 6, 5, 5]	[1, 1, 1, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]
Chi_{145}	=	[0, 4, 1, 6, 6, 5, 6]	[0, 1, 2, 0, 0, 0, 3, 1, 0, 0]
Chi_{146}	=	[0, 4, 1, 6, 6, 6, 6]	[0, 0, 3, 0, 0, 0, 3, 1, 0, 0]
Chi_{147}	=	[0, 4, 1, 7, 7, 6, 8]	[0, 1, 3, 0, 0, 0, 3, 1, 0, 0]
Chi_{148}	=	[0, 4, 2, 6, 6, 5, 6]	[0, 1, 1, 0, 2, 2, 2, 0, 0, 0]
Chi_{149}	=	[0, 4, 2, 6, 6, 5, 7]	[4, 1, 0, 0, 2, 1, 3, 0, 0, 0]
Chi_{150}	=	[0, 4, 2, 6, 6, 7, 7]	[1, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 1]
Chi_{151}	=	[0, 4, 2, 7, 7, 6, 9]	[0, 1, 3, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 0]
Chi_{152}	=	[0, 4, 2, 7, 7, 7, 9]	[7, 0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 0, 0]

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite			
Nummer		In irreduzible	In monomiale
Chi_{153}	=	[0, 4, 2, 8, 8, 7, 7]	[0, 1, 2, 0, 2, 1, 3, 0, 0, 0]
Chi_{154}	=	[0, 4, 3, 6, 6, 5, 8]	[4, 1, 0, 0, 3, 2, 2, 0, 0, 0]
Chi_{155}	=	[0, 4, 3, 6, 6, 6, 8]	[0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
Chi_{156}	=	[0, 4, 3, 6, 6, 7, 8]	[0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
Chi_{157}	=	[0, 4, 3, 7, 7, 6, 9]	[0, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1]
Chi_{158}	=	[0, 4, 3, 7, 7, 6, 10]	[0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]
Chi_{159}	=	[0, 4, 3, 8, 8, 7, 8]	[0, 1, 2, 2, 1, 0, 4, 0, 0, 0]
Chi_{160}	=	[0, 4, 3, 8, 8, 7, 9]	[7, 1, 0, 0, 3, 0, 4, 0, 0, 0]
Chi_{161}	=	[0, 4, 4, 6, 6, 5, 8]	[0, 1, 1, 0, 4, 4, 0, 0, 0, 0]
Chi_{162}	=	[0, 4, 4, 6, 6, 7, 8]	[0, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 1]
Chi_{163}	=	[0, 4, 4, 8, 8, 7, 8]	[5, 1, 0, 0, 4, 1, 3, 0, 0, 0]
Chi_{164}	=	[0, 5, 1, 8, 8, 7, 8]	[4, 1, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 0, 0]

Der Charakter
$$Chi_{165} = [0, 1, 1, 2, 2, 1, 2]$$
ist kein Element von MON-$\mathbb{N}$-C. Trotzdem ist $2 * Chi_{165}$ zerlegbar als Summe monomialer Charaktere. Eine Paramaterdarstellung des Lösungsraums $x * M = Chi_{165}$, wobei M die Matrix ist mit Spalten μ_i, wird gegeben von:

$$[-10v_4 - 3v_3 - 2v_1 - 2v_1 - 2v_2 + 11, v_4, v_3, v_1 + 2v_2 + v_3 + 4v_4 - 5,$$

$$-v_3 - v_2 - 4v_4 + 5, v_1, v_2, -v_1 - v_2 - 2v_4 + 3, v_4 - 1, v_4 - 1]$$

Man kann Chi_{165} ermitteln aus

$$H =< (1, 2, 3), (1, 4)(2, 5, 3, 6) >$$

$$T =< (1, 6, 5), (1, 2)(3, 6, 4, 5) >$$

und daher
$$H \cap T =< (2, 3)(5, 6), (1, 4)(2, 5, 3, 6) >$$

Für die nächsten 31 Charaktere gilt daß diese nicht in MON-$\mathbb{Q}$-C liegen.

Nummer	In irreduzible	H	T	$H \cap T$
Chi_{166}	$[0,0,0,0,0,1,1]$	$\langle(2,4)(3,6), (4,6,5)\rangle$	$\langle(1,3)(4,6), (1,5,4)\rangle$	$\langle(4,5,6), (3,4)(5,6)\rangle$
Chi_{167}	$[0,0,0,1,1,0,0]$	$\langle(1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6)\rangle$	$\langle(3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle(3,5)(4,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{168}	$[0,0,0,1,1,0,1]$	$\langle(3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle(4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle(4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{169}	$[0,0,0,1,1,1,0]$	$\langle(1,6)(2,3), (1,6,3)(2,5,4)\rangle$	$\langle(2,4)(3,6), (4,6,5)\rangle$	$\langle(3,4)(5,6), (2,3)(4,5)\rangle$
Chi_{170}	$[0,0,0,1,1,1,1]$	$\langle(2,4)(3,6), (4,6,5)\rangle$	$\langle(4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle(4,5,6), (2,3)(5,6)\rangle$
Chi_{171}	$[0,0,0,2,2,1,1]$	$\langle(3,5)(4,6), (4,5,6)\rangle$	$\langle(4,5,6), (1,2,3)\rangle$	$\langle(4,5,6)\rangle$
Chi_{172}	$[0,0,0,2,2,1,2]$	$\langle(1,3,4)(2,5,6), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle(2,4,3), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle(3,4)(5,6)\rangle$
Chi_{173}	$[0,0,0,2,2,1,3]$	$\langle(4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle(2,3)(5,6), (2,5)(3,6)\rangle$	$\langle(2,3)(5,6)\rangle$
Chi_{174}	$[0,0,1,1,1,0,1]$	$\langle(1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6)\rangle$	$\langle(3,6)(4,5), (3,4)(5,6), (1,2)(4,5)\rangle$	$\langle(3,4)(5,6), (3,5)(4,6)\rangle$
Chi_{175}	$[0,0,1,2,2,1,0]$	$\langle(3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle(1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6)\rangle$	$\langle(3,4)(5,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{176}	$[0,0,1,3,3,2,2]$	$\langle(1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6)\rangle$	$\langle(4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle(1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{177}	$[0,0,1,3,3,2,3]$	$\langle(4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle(1,6,5)(2,3,4), (1,5)(3,4)\rangle$	$\langle(2,3)(5,6)\rangle$
Chi_{178}	$[0,0,2,2,2,1,1]$	$\langle(1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6)\rangle$	$\langle(1,2)(4,5), (1,3,4)(2,6,5), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle(3,4)(5,6), (3,5)(4,6)\rangle$

Fortsetzung auf nächster Seite

Fortsetzung von voriger Seite				
Nummer	In irreduzible	H	T	$H \cap T$
Chi_{179}	$[0,0,2,4,4,3,3]$	$\langle (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle (1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6)\rangle$	$\langle (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{180}	$[0,1,0,1,1,0,1]$	$\langle (3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle (1,4)(2,3), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{181}	$[0,1,0,2,2,1,0]$	$\langle (1,2)(5,6), (1,3,5)(2,4,6), (3,5)(4,6)\rangle$	$\langle (3,5)(4,6), (4,5,6)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6), (3,5)(4,6)\rangle$
Chi_{182}	$[0,1,0,3,3,2,2]$	$\langle (3,5)(4,6), (4,5,6)\rangle$	$\langle (1,3,4)(2,5,6), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6)\rangle$
Chi_{183}	$[0,1,0,3,3,2,3]$	$\langle (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle (2,4,3), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle (2,3)(5,6)\rangle$
Chi_{184}	$[0,1,1,1,1,0,1]$	$\langle (1,2,3), (1,4)(2,5,3,6)\rangle$	$\langle (3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{185}	$[0,1,1,2,2,3,4]$	$\langle (2,3,4,5,6)\rangle$	$\langle (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle ()\rangle$
Chi_{186}	$[0,1,1,4,4,3,2]$	$\langle (1,2,3)(4,5,6)\rangle$	$\langle (3,5,4)\rangle$	$\langle ()\rangle$
Chi_{187}	$[0,1,2,3,3,4,4]$	$\langle (1,6)(2,3), (1,6,3)(2,5,4)\rangle$	$\langle (2,6,4,3,5), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6)\rangle$
Chi_{188}	$[0,1,3,4,4,5,4]$	$\langle (2,3,4,5,6)\rangle$	$\langle (1,2,3)(4,5,6)\rangle$	$\langle ()\rangle$
Chi_{189}	$[0,2,0,2,2,1,1]$	$\langle (3,5)(4,6), (4,5,6), (1,2)(5,6)\rangle$	$\langle (1,4)(2,3), (2,4,3), (3,4)(5,6)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6), (1,2)(5,6)\rangle$
Chi_{190}	$[0,2,0,4,4,3,3]$	$\langle (4,5,6), (1,2,3), (2,3)(5,6)\rangle$	$\langle (2,5)(3,4), (3,4,5)\rangle$	$\langle (2,3)(4,5)\rangle$
Chi_{191}	$[0,2,1,3,3,4,4]$	$\langle (2,4)(3,6), (4,6,5)\rangle$	$\langle (1,6,3,4,5), (1,3)(4,5)\rangle$	$\langle (3,4)(5,6)\rangle$
Fortsetzung auf nächster Seite				

Fortsetzung von voriger Seite				
Nummer	In irreduzible	H	T	$H \cap T$
Chi_{192}	$[0,3,1,4,4,5,4]$	$\langle(2,3,4,5,6)\rangle$	$\langle(1,3,2)\rangle$	$\langle()\rangle$
Chi_{193}	$[0,3,3,4,4,7,6]$	$\langle(2,3,4,5,6)\rangle$	$\langle(1,3,5,2,4)\rangle$	$\langle()\rangle$
Chi_{194}	$[0,3,3,5,5,7,8]$	$\langle(2,3,5,6,4),$ $(3,4)(5,6)\rangle$	$\langle(1,3,5,2,4)\rangle$	$\langle()\rangle$
Chi_{195}	$[0,3,4,6,6,8,8]$	$\langle(1,6)(2,3),$ $(1,6,3)(2,5,4)\rangle$	$\langle(2,3,4,5,6)\rangle$	$\langle()\rangle$
Chi_{196}	$[0,4,3,6,6,8,8]$	$\langle(2,4)(3,6),$ $(4,6,5)\rangle$	$\langle(1,3,5,2,4)\rangle$	$\langle()\rangle$

2 Zur B-Gruppen

2.1 SL(2,3) als Matrixgruppe über $\mathbb{F}_{11}$

```
gap> sl := SpecialLinearGroup( 2, 11);
SL(2,11)
gap> Size(sl);
1320
## SL(2,11) enth"alt SL(2,5) und damit SL(2,3)
## als Untergruppe.
gap> l := Lattice( sl );
LatticeSubgroups( SL(2,11) )
gap> SetPrintLevel( l, 1 );
gap> l;
#I  class 1, size 1, length 1
#I  class 2, size 2, length 1
#I  class 3, size 3, length 55
#I  class 4, size 4, length 55
#I  class 5, size 5, length 66
#I  class 6, size 6, length 55
#I  class 7, size 8, length 55
#I  class 8, size 10, length 66
#I  class 9, size 11, length 12
#I  class 10, size 12, length 55
```

```
#I  class 11, size 12, length 55
#I  class 12, size 12, length 55
#I  class 13, size 20, length 66
#I  class 14, size 22, length 12
#I  class 15, size 24, length 55
#I  class 16, size 24, length 55
#I  class 17, size 55, length 12
#I  class 18, size 110, length 12
#I  class 19, size 120, length 11
#I  class 20, size 120, length 11
#I  class 21, size 1320, length 1
LatticeSubgroups( SL(2,11) )
gap> rep15 := Representative( l.classes[15] );
Subgroup( SL(2,11),
  [ [ [ 0*Z(11), Z(11) ], [ Z(11)^4, Z(11)^5 ] ],
    [ [ Z(11)^5, 0*Z(11) ], [ 0*Z(11), Z(11)^5 ] ],
    [ [ Z(11)^0, Z(11)^8 ], [ Z(11)^8, Z(11)^5 ] ],
    [ [ Z(11)^2, Z(11)^6 ], [ Z(11)^8, Z(11)^7 ] ] ] )
gap> rep16 := Representative( l.classes[16] );
Subgroup( SL(2,11),
  [ [ [ Z(11)^5, 0*Z(11) ], [ 0*Z(11), Z(11)^5 ] ],
    [ [ 0*Z(11), Z(11)^0 ], [ Z(11)^5, 0*Z(11) ] ],
    [ [ Z(11)^0, Z(11)^8 ], [ Z(11)^8, Z(11)^5 ] ],
    [ [ Z(11)^2, Z(11)^7 ], [ Z(11)^3, Z(11)^9 ] ] ] )
gap> GroupId( rep15 );
rec(
  catalogue := [ 24, 13 ],
  names := [ "Q8+S3" ],
  size := 24 )
gap> GroupId( rep16 );
rec(
  catalogue := [ 24, 14 ],
  names := [ "SL(2,3)" ],
  size := 24 )
## Offensichtlich gibt rep16 uns jetzt SL(2,3)
## als Matrixgruppe "uber GF(11).
gap>
```

2.2 SL(2,5) $\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$ ist eine B-Gruppe

In diesem Beispiel kann man sehen, wie man eine Permutationsdarstellung kleiner Dimension für SL(2,5) $\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$ in GAP bilden kann. Aus dieser Darstellung läßt sich dann den Untergruppenverband ermitteln, woraus wir schließen können daß SL(2,5) $\ltimes(Z_{11} \times Z_{11})$ eine B-Gruppe ist.

```
gap> mat :=
Group( [ [ Z(11)^9, Z(11)^3, 0*Z(11) ],
         [ Z(11)^3, Z(11)^6, 0*Z(11) ],
         [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
               [ [ Z(11)^9, Z(11), 0*Z(11) ],
                 [ Z(11)^5, Z(11)^6, 0*Z(11) ],
                 [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
       [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), Z(11)^0 ],
         [ 0*Z(11), Z(11)^0, 0*Z(11) ],
         [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
               [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), 0*Z(11) ],
                 [ 0*Z(11), Z(11)^0, Z(11)^0 ],
                 [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ] );;
gap> Vektoren := GF(11)^3;; ## Gibt alle
     ## dreidimensionale Vektoren "uber GF(11).
gap> nv := NormedVectors( Vektoren ); ## Nimmt aus
     ## Vektoren die Vektoren, die als erste Eingabe
     ## ein 1 haben.
gap> op := Operation( mat, nv , OnLines );;
     ## OnLines spezificiert wie die Elemente der
     ## Gruppe operieren. Hier wird eine Vektor aus
     ## nv multipliziert mit einem Element der Gruppe.
     ## Das Ergebnis wird normiert. `Operation' gibt
     ## eine Permutationsdarstellung zur"uck in der
     ## die Erzeugenden operieren auf die Ziffermenge
     ## 1..#nv genau wie die Erzeuger von  mat operieren
     ## auf die Menge nv.
gap> Length( op.generators);
4
gap> leer:=[];;
gap>  for i in [1..4] do
> Add( leer, LargestMovedPointPerm( op.generators[i]));
> od;
```

```
gap> leer;
[ 133, 133, 133, 133 ]
gap> orb := Orbits( op , [1..133]); ## Ermittelt die Bahnen.
[ [ 1 ], [ 2, 57, 35, 3, 90, 101, 58, 61, 68, 36, 37, 65,
     41, 4, 24, 91, 97, 102, 109, 99, 106, 59, 64, 92, 62,
     79, 112, 69, 73, 11, 77, 44, 12, 78, 38, 96, 103, 60,
     6, 72, 66, 42, 13, 25, 98, 31, 94, 105, 30, 27, 110,
     33, 93, 34, 111, 100, 107, 63, 95, 67, 26, 123, 80, 85,
     113, 121, 89, 70, 83, 117, 74, 39, 5, 87, 71, 9, 75,
     40, 10, 88, 122, 76, 45, 108, 82, 116, 104, 7, 46, 14,
     20, 32, 16, 28, 43, 15, 22, 29, 18, 19, 21, 124, 133,
     128, 81, 86, 120, 126, 114, 115, 118, 127, 84, 131,
     130, 125, 8, 119, 129, 47, 49, 48, 54, 17, 50, 23, 56,
     52, 53, 55, 51, 132 ] ]
gap> op2 := Operation( op , orb[2] );; ## Auf der ersten Bahn
                                       ## passiert nichts...
gap> ond := Subgroup( op2,[op2.1,op2.2]);;
     ## ond entspricht SL(2,5)
gap> Size( ond );
120
gap> op3 := Operation( op2,Cosets( op2,ond),OnRight);;
     ## Cosets(op2,ond) berechnet die Nebenklassen von ond
     ## in op2. Operation gibt wieder eine Permutationsgruppe
     ## zur"uck, jetzt diejenige die der Wirkung der op2 auf
     ## die Nebenklassen entspricht.
Group( ( 2, 90, 34, 40, 21, 11, 85, 96, 41, 12)( 3, 116, 94,
 49, 20, 10, 82, 84, 42, 13)( 4, 55, 57, 48, 19, 9, 95, 97,
 43, 14)(  5, 35, 99, 47, 18, 8, 108, 80, 44, 15)( 6, 120, 98,
 46, 17, 7, 63, 59, 45, 16) ( 22, 38, 121, 104, 71, 31, 62,
 56, 60, 65)( 23, 93, 107, 115, 70, 30, 89, 32, 86, 33)( 24,
 88, 117, 92, 54, 29, 118, 110, 113, 66)( 25, 111, 114, 109,
 69, 28, 105, 83, 37, 67)( 26, 50, 106, 53, 68, 27, 81, 119,
 112, 61)( 36, 102, 87, 51, 100, 79, 64, 101, 103, 91)( 39,
 77, 58, 74, 78, 52, 73, 75, 76, 72), (  2, 18, 112, 78, 31,
 11, 15, 53, 72, 22)(  3, 14, 104, 77, 30, 10, 19, 60, 73,
 23)( 4, 21, 37, 39, 29, 9, 12, 109, 52, 24)(  5, 17, 115, 76,
 28, 8, 16, 86, 74, 25)(  6, 13, 113, 58, 27, 7, 20, 92, 75,
 26)( 32, 81, 35, 103, 49, 107, 50, 108, 51, 42)( 33, 66, 71,
 67, 68, 70, 54, 65, 69, 61)( 34, 97, 84, 59, 99, 96, 57, 94,
```

```
 98, 80)( 36, 41, 56, 88, 116, 79, 40, 121, 118, 82)( 38, 95,
 102, 47, 114, 62, 55, 64, 44, 83)( 43, 110, 89, 63, 91, 48,
 117, 93, 120, 100)( 45, 119, 111, 85, 101, 46, 106, 105, 90,
 87), (  1, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)( 12, 97, 104, 43,
 85, 118, 119, 91, 77, 61, 24)( 13, 121, 98, 87, 115, 76, 46,
 71, 82, 27, 50)( 14, 95, 75, 94, 93, 67, 92, 83, 30, 49, 51)
 ( 15, 41, 107, 70, 96, 108, 79, 22, 109, 62, 52)( 16, 66,
 102, 105, 44, 80, 25, 72, 110, 63, 53)( 17, 112, 120, 117,
 78, 28, 99, 47, 111, 64, 54)( 18, 39, 38, 37, 31, 36, 35, 34,
 33, 32, 40)( 19, 103, 42, 23, 114, 113, 69, 89, 84, 58, 55)
 ( 20, 81, 26, 116, 65, 45, 74, 86, 101, 59, 56)( 21, 29, 68,
 73, 100, 106, 88, 90, 48, 60, 57), (  1, 107, 114, 119, 110,
 56, 121, 117, 106, 83, 32)(  2, 41, 23, 118, 72, 59, 13, 120,
 100, 92, 33)(  3, 15, 42, 85, 25, 101, 50, 112, 73, 67, 34)
 (  4, 52, 103, 43, 80, 86, 27, 17, 68, 93, 35)(  5, 62, 19,
 104, 44, 74, 82, 54, 29, 94, 36)(  6, 109, 55, 97, 105, 45,
 71, 64, 21, 75, 31)(  7, 22, 58, 12, 102, 65, 46, 111, 57,
 95, 37)(  8, 79, 84, 24, 66, 116, 76, 47, 60, 14, 38)(  9,
 108, 89, 61, 16, 26, 115, 99, 48, 51, 39)( 10, 96, 69, 77,
 53, 81, 87, 28, 90, 49, 18)( 11, 70, 113, 91, 63, 20, 98,
 78, 88, 30, 40) )
gap> Size( op3 );
14520
gap> op3.perfectSubgroups := [ond];;
gap> lat := Lattice( op3 );;
     ## Berechnet den Untergruppenverband.
gap> SetPrintLevel( lat,1);;
gap> op3.name := "op3";
"op3"
gap> lat;
#I  Class number   1, Length    1, Order 1
#I  Class number   2, Length  121, Order 2
#I  Class number   3, Length 1210, Order 3
#I  Class number   4, Length 1815, Order 4
#I  Class number   5, Length  726, Order 5
#I  Class number   6, Length 1210, Order 6
#I  Class number   7, Length  605, Order 8
#I  Class number   8, Length  726, Order 10
#I  Class number   9, Length   12, Order 11
```

```
#I  Class number  10, Length 1210, Order 12
#I  Class number  11, Length  726, Order 20
#I  Class number  12, Length  132, Order 22
#I  Class number  13, Length  605, Order 24
#I  Class number  14, Length  132, Order 55
#I  Class number  15, Length  132, Order 110
#I  Class number  16, Length  121, Order 120
#I  Class number  17, Length    1, Order 121
#I  Class number  18, Length    1, Order 242
#I  Class number  19, Length   10, Order 363
#I  Class number  20, Length   15, Order 484
#I  Class number  21, Length    6, Order 605
#I  Class number  22, Length   10, Order 726
#I  Class number  23, Length    5, Order 968
#I  Class number  24, Length    6, Order 1210
#I  Class number  25, Length   10, Order 1452
#I  Class number  26, Length    6, Order 2420
#I  Class number  27, Length    5, Order 2904
#I  Class number  28, Length    1, Order 14520
Lattice( op3 )
## B-Gruppe!
gap> quit;
```

2.3 (SL(2,3) $\times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ ist eine B-Gruppe

Erzeugende 2x2 Matrizen für SL(2,3) $\times Z_5$ über $\mathbb{F}_{11}$.

```
gap> sl231 := [[ 0*Z(11),Z(11)^0 ], [ Z(11)^5,0*Z(11) ]];
gap> sl232 := [[ Z(11)^4,Z(11)^0 ], [ Z(11),Z(11)^4 ]];
gap> c5 := [[ Z(11)^8,0*Z(11) ], [ 0*Z(11),Z(11)^8 ]];
```

Die Liste der Klassen von konjugierten Untergruppen von SL(2,3):

Klasse	Länge der Klasse	Typus der Untergruppe
1	1	C_1
2	1	C_2
3	4	C_3
4	3	C_4
5	4	C_6
6	1	Q_8
7	1	$SL(2,3)$

Die Liste der Klassen von konjugierten Untergruppen von SL(2,3) $\times Z_5$ ist:

Klasse	Länge der Klasse	Typus der Untergruppe
1	1	C_1
2	1	C_2
3	4	C_3
4	3	C_4
5	1	C_5
6	4	C_6
7	1	Q_8
8	1	C_{10}
9	4	C_{15}
10	3	C_{20}
11	1	$SL(2,3)$
12	4	C_{30}
13	1	$Q_8 \times C_5$
14	1	$SL(2,3) \times C_5$

Gruppe3 ist eine Matrixdarstellung der Gruppe (SL(2,3) $\times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$.

```
gap> gruppe3 :=
 > Group( [ [ 0*Z(11), Z(11)^0, 0*Z(11) ],
 > [ Z(11)^5, 0*Z(11), 0*Z(11) ],
 > [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
 > [ [ Z(11)^4, Z(11)^0, 0*Z(11) ],
 > [ Z(11), Z(11)^4, 0*Z(11) ],
 > [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
 > [ [ Z(11)^8, 0*Z(11), 0*Z(11) ],
 > [ 0*Z(11), Z(11)^8, 0*Z(11) ],
 > [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
 > [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), Z(11)^0 ],
```

```
> [ 0*Z(11), Z(11)^0, 0*Z(11) ],
> [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ],
> [ [ Z(11)^0, 0*Z(11), 0*Z(11) ],
> [ 0*Z(11), Z(11)^0, Z(11)^0 ],
> [ 0*Z(11), 0*Z(11), Z(11)^0 ] ] );
```

Der Untergruppenverband der Gruppe (SL(2,3) $\times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$:

Klasse	Ordnung der Gruppe	Länge der Klasse
1	1	1
2	2	121
3	3	484
4	4	363
5	5	121
6	6	484
7	8	121
8	10	121
9	11	12
10	15	484
11	20	363
12	22	132
13	24	121
14	30	484
15	40	121
16	55	132
17	110	132
18	120	121
19	121	1
20	242	1
21	363	4
22	484	3
23	605	1
24	726	4
25	968	1
26	1210	1
27	1815	4
28	2420	3
29	2904	1
30	3630	4
31	4840	1
32	14520	1

Alle Klassen enthälten Gruppen verschiedener Ordnung, deshalb ist

$(SL(2,3) \times Z_5) \ltimes (Z_{11} \times Z_{11})$ eine B-Gruppe.