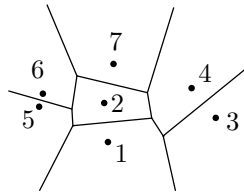


Gekke Voronoi diagrammen.

Roderik Lindenbergh
Mathematische Geodesie en Puntsbepaling
Technische Universiteit Delft
R.C.Lindenbergh@geo.tudelft.nl



Figuur 1: Een Voronoi diagram.

Stel je een aantal supermarkten in een stad voor. Je kan de stad verdelen in gebieden door overal de dichtstbijzijnde supermarkt te bepalen. Zo'n onderverdeling wordt het *Voronoi diagram* genoemd. Het gewone Voronoi diagram behoort tegenwoordig tot de middelbare schoolstof en wordt goed begrepen. Dat wordt anders als we de supermarkten vervangen door SRV wagens en die kris kras laten rond rijden of zelfs laten botsen: het Voronoi diagram van de SRV wagens verandert mee, maar te bepalen hoe is nog een hele puzzel.

Het Voronoi diagram.

In plaats van supermarkten beschouwen we natuurlijk punten. Stel dat S een verzameling van n verschillende punten in het vlak is, dus $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ met $p_i \in \mathbb{R}^2$ en $p_i \neq p_j$ als $i \neq j$. De gebieden van de supermarkten worden Voronoi cellen genoemd: de *Voronoi cel* van punt p_i bestaat uit alle punten q die niet dichterbij een ander punt p_j uit S liggen. Oftewel

$$V(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(q, p_i) \leq d(q, p_j), i \neq j\}.$$

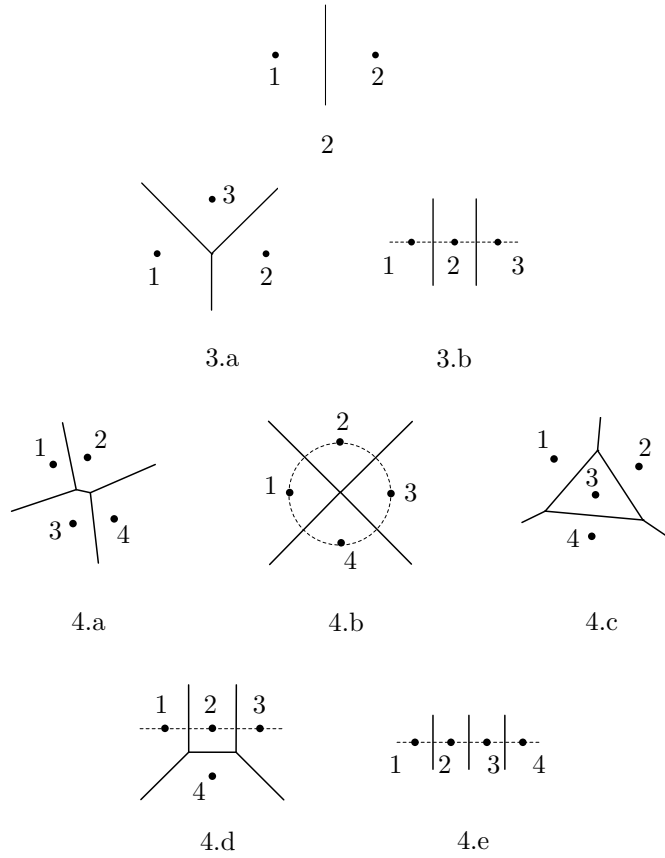
Hier is $d(q, p)$ de gewone, Euclidische afstand tussen twee punten $q, p \in \mathbb{R}^2$. Het *Voronoi diagram* van de punten in S bestaat uit alle Voronoi cellen en uit alle mogelijke doorsnedes van de cellen.

In Figuur 1 zie je een Voronoi diagram bestaande uit zeven punten. Elk punt p_i leeft in zijn eigen cel $V(p_i)$. Sommige cellen hebben een kant gemeen. De

cellen $V(p_2)$ en $V(p_4)$ bijvoorbeeld delen een kant $e(p_2, p_4)$. De 'e' staat voor het Engelse 'edge'. Punten q op kant $e(p_2, p_4)$ zijn even dicht bij p_2 als bij p_4 terwijl de andere p_i zeker niet dicht bij q zijn.

De verzameling van alle punten op gelijke afstand van p_i en p_j heet de *middelloodlijn* $B(p_i, p_j)$. De middelloodlijn is dus de lijn die de punten die dicht bij p_i zijn, scheidt van de punten die dicht bij p_j zijn. In het bijzonder ligt elke Voronoi kant $e(p_i, p_j)$ op de middelloodlijn $B(p_i, p_j)$. Als we maar twee punten hebben, zoals in Figuur 2, diagram 2, dan is hun middelloodlijn de unieke kant in het Voronoi diagram.

Drie Voronoi cellen kunnen elkaar ontmoeten in een punt. Voronoi cellen $V(p_2)$, $V(p_7)$ en $V(p_4)$ in Figuur 1 delen bijvoorbeeld een punt, dat we even x noemen. Dit betekent dat x op gelijke afstand ligt van p_2 , p_7 en p_4 . Oftewel, x is het middelpunt van de cirkel $\odot_{2,7,4}$ door p_2 , p_7 en p_4 . Merk op dat er geen punten binnen $\odot_{2,7,4}$ liggen. Zulke lege cirkels vormen in zekere zin de bouwstenen van het Voronoi diagram



Figuur 2: Voronoi diagrammen van twee, drie en vier punten.

Gekke Voronoi diagrammen.

In Figuur 2 staan alle Voronoi diagrammen met twee, drie of vier punten. Een aantal van deze diagrammen is een beetje gek. Ik noem een Voronoi diagram *gek* als

1. er 4 cellen zijn die een punt gemeen hebben of
2. er een cel is met twee evenwijdige, oneindig lange kanten.

Dus diagram 3.b is gek omdat de cel van punt 2 begrensd wordt door twee evenwijdige, oneindig lange kanten. En diagram 4.b is gek omdat de vier cellen een punt gemeen hebben.

Als een Voronoi diagram gek is, dan liggen de punten die het diagram definiëren altijd op een onwaarschijnlijke manier: in diagram 3.b liggen de drie punten op een lijn en in diagram 4.b liggen de vier punten op een gemeenschappelijke cirkel. Als je zo maar wat (random) punten uitstrooit, dan is de kans 0 is dat er drie op een lijn liggen of vier op een cirkel. Een verzameling punten heet *generiek* als geen drie punten op een lijn liggen en geen vier punten op een cirkel. In Figuur 2 staan dus vier generieke configuraties.

Als je alleen Figuur 2 bekijkt, lijkt het of elke niet-generieke configuratie van punten een gek Voronoi diagram oplevert. Dit is niet waar. Probeer maar en voorbeeld te bedenken. Andersom is het niet moeillijk te bewijzen dat in een gek Voronoi diagram de punten altijd niet-generiek liggen.

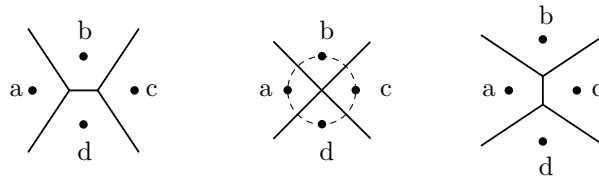
Voor het rekenen met computers zijn niet-generieke punten configuraties een beetje vervelend. Allerlei testjes die je kan gebruiken om de structuur van bijvoorbeeld een Voronoi diagram uit te rekenen, werken opeens niet meer als je zo'n gekke configuratie probeert door te rekenen. Zo kan je in diagram 3.b niet bepalen of punt 3 boven of onder de lijn door de punten 1 en 2 gaat, daar punt 3 op die lijn ligt. Om dit lastige gedrag te verhelpen, kan je de configuratie een schop geven: tel bij elke punt (x, y) een storingsfactor $(\Delta x, \Delta y)$ op. Door de storingsfactoren klein genoeg maar wel steeds per punt verschillend te nemen, verandert aan de ene kant het plaatje nauwelijks, terwijl aan de andere kant de configuratie wel generiek en dus berekenbaar wordt.

Essentiële veranderingen.

Zijn deze gekke configuraties vervelend voor het rekenen, voor wiskundigen zijn ze juist interessant. Ze komen namelijk vanzelf om de hoek kijken als we de punten in het Voronoi diagram laten bewegen. Stel bijvoorbeeld in Figuur 2 dat we diagram 4.a willen veranderen in diagram 4.c. Alle punten moeten dan een beetje veranderen, maar in het bijzonder moet punt 3 over de lijn door de punten 1 en 4 heen. Maar dat betekent dat de configuratie op dat moment gek is en dus ook het bijbehorende Voronoi diagram.

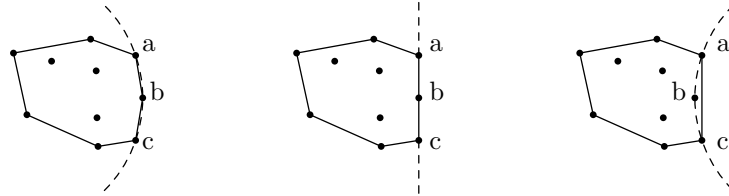
In het algemeen blijkt tussen elk tweetal verschillende generieke Voronoi diagrammen minstens één gek Voronoi diagram te liggen. Maar wanneer zijn twee generieke Voronoi diagrammen verschillend? Hiertoe gebruiken we de combinatoriek van de Voronoi diagrammen. Zoals eerder vermeld, bepalen de lege cirkels in zekere zin het Voronoi diagram. Maar dat betekent dat wanneer we voor twee Voronoi diagrammen V_1 en V_2 alle lege cirkels bepalen, we twee lijsten C_1 en C_2 van lege cirkels krijgen die we kunnen vergelijken. Bij diagram 4.a in Figuur 2 hoort bijvoorbeeld de lijst van lege cirkels \odot_{123}, \odot_{243} en bij diagram 4.c hoort de lijst $\odot_{123}, \odot_{243}, \odot_{134}$. Dus deze diagrammen zijn inderdaad verschillend volgens deze definitie. Merk op dat je ook een verschillend diagram krijgt als je in diagram 4.a bijvoorbeeld de punten 1 en 2 omwisselt.

Voronoi diagrammen kunnen maar op twee essentieel verschillende manieren veranderen. En deze manieren houden nauw samen met ‘drie op een lijn’ en ‘vier op een cirkel’.



Figuur 3: Een cirkel verandering.

De *cirkel verandering* wordt geïllustreerd in Figuur 3. In het plaatje links zijn er twee lege cirkels, namelijk \odot_{abd} en \odot_{bcd} . Dan beweegt punt a naar rechts en komen we uit in het middelste plaatje. Hier zijn de twee lege cirkels samengesmolten tot één lege cirkel, maar wel een gekke cirkel: ze bevat namelijk vier punten. Als punt a verder naar rechts beweegt, wordt de situatie weer normaal: er zijn twee lege cirkels, maar wel andere, namelijk \odot_{abc} en \odot_{acd} . Tegelijkertijd met deze verandering in lege cirkels is de Voronoi kant $e(b, d)$ ‘omgeklapt’ in een een kant $e(a, c)$.



Figuur 4: Een convex omhulsel verandering.

De cirkel verandering kan overal in het Voronoi diagram plaatsvinden, de tweede soort verandering alleen op de rand. Hier bedoel ik met de rand het convex omhulsel van de verzameling S van punten die het Voronoi diagram definiëert.

Het *convex omhulsel* is de kleinste convexe verzameling die alle punten van S bevatten. Punten in S behoren tot het convex hulsel van S precies als ze in een onbegrensde Voronoi cel leven. Bekijk maar Figuur 2, diagram 4.c: punten 1, 2 en 4 behoren tot het convex omhulsel en zitten in een onbegrensde cel; punt 3 ligt in het inwendige van het omhulsel en heeft een begrensd cel.

Bij een *convex omhulsel verandering* verlaat of bereikt een bewegend punt het convex omhulsel, zie Figuur 4 waar punt b naar links beweegt en daardoor het convex omhulsel verlaat. Op het moment dat dat gebeurt, in het middelste plaatje, is de situatie weer gek: a , b en c liggen op een lijn. Merk op dat bij dit type verandering een lege cirkel ontstaat: voor de verandering, in het plaatje links, bevat de cirkel \odot_{abc} alle andere punten; na de verandering is \odot_{cba} leeg. Natuurlijk kan je ingewikkeldere veranderingen verzinnen, waarbij zeven punten op een lege cirkel liggen of tien punten tegelijk het convex omhulsel bereiken, maar al deze veranderingen zijn samen te stellen uit de cirkel verandering en de convex omhulsel verandering.

Nog gekker.

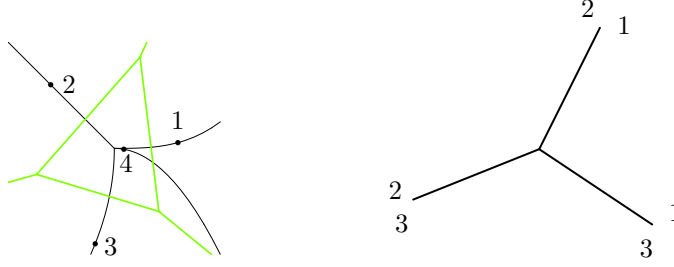
Het kan nog gekker. Tot nu toe hebben we aangenomen dat de punten in het Voronoi diagram allemaal verschillend zijn. Maar bij kris kras bewegende punten kan er wel eens iets mis gaan en het gebeuren dat twee punten botsen of over elkaar heen bewegen. Je kan je afvragen of je tijdens zo'n botsing nog over het Voronoi diagram van de punten kan praten.

Uiteraard kan dit, als je maar het juiste model gebruikt. Een idee is om je model zo te maken dat je ook weet waar de punten zijn kort voor of kort na de botsing. Maar dat wil zeggen dat je de positie van de punten zou willen weten als functie van de tijd. Neem bijvoorbeeld eens

$$\begin{aligned} q_1 &= (2t, 2t^3), & q_2 &= (-2t, 2t), \\ q_3 &= (-2t^2, -3t), & q_4 &= (t^2, -t^4). \end{aligned}$$

De banen van q_1 t/m q_4 voor $0 \leq t \leq 1$ zijn te zien in het linker plaatje in Figuur 5. De posities op $t = .3$ worden aangegeven door de punten, terwijl het Voronoi diagram op $t = .3$ grijs gestippeld is. We zien dat op $t = .3$ punt q_4 nog steeds bijna in de oorsprong zit, terwijl de andere drie punten al aardig ver weg zijn. Dit komt natuurlijk doordat q_4 'kwadratisch' beweegt, daar t^2 de term met de kleinste macht is die de beweging van q_4 beschrijft, terwijl de andere punten lineair bewegen.

Uit het linker plaatje in Figuur 5 kunnen we al een aardig idee krijgen voor een *limiet Voronoi diagram* dat hoort bij de posities van de punten op $t = 0$. De Voronoi cel van q_4 is op $t = .3$ een driehoek. Als t kleiner wordt, zal die driehoek ook kleiner worden en tenslotte ineen krimpen tot één punt op $t = 0$. Het enige wat dan zichtbaar overblijft van het Voronoi diagram zijn de kanten $e(q_1, q_2)$, $e(q_1, q_3)$ en $e(q_2, q_3)$. Dit is juist het rechter plaatje in Figuur 5.



Figuur 5: Botsende punten en hun Voronoi diagram tijdens de botsing.

We hebben bij deze redenering stilzwijgend aangenomen dat het Voronoi diagram van q_1 t/m q_4 niet verandert op de manier van boven. Dat wil dus zeggen dat er voor $0 < t < .3$ geen cirkel gebeurtenis of convex omhulsel gebeurtenis optreedt. Dit geeft een manier om het limiet Voronoi diagram te bepalen: evalueer de relatie die het convex omhulsel of de lege cirkels aangeven voor t klein genoeg.

Als voorbeeld bekijken we de relatie van drie punten op een lijn. Zij l_{uv} de gerichte lijn die eerst door punt $u = (u_x, u_y)$ en dan door $v = (v_x, v_y)$ gaat. Zij D de determinant

$$D = D_{u,v,w} = \begin{vmatrix} 1 & u_x & u_y \\ 1 & v_x & v_y \\ 1 & w_x & w_y \end{vmatrix}.$$

Punt $w = (w_x, w_y)$ ligt links van l_{uv} als $D > 0$, rechts van l_{uv} als $D < 0$ en op l_{uv} als $D = 0$.

Nu vervangen we de gewone punten u , v en w door tijdsafhankelijke punten $u(t)$, $v(t)$ en $w(t)$. Determinant D wordt dan ook een tijdsafhankelijke determinant $D(t)$:

$$D(t) = D_{u,v,w}(t) = \begin{vmatrix} 1 & u(t)_x & u(t)_y \\ 1 & v(t)_x & v(t)_y \\ 1 & w(t)_x & w(t)_y \end{vmatrix}.$$

Met $u(t) = q_1(t)$, $v(t) = q_2(t)$ en $w(t) = q_3(t)$ krijgen we bijvoorbeeld dat $D(t) = 16t^2 + 4t^3 + O(t^4)$. Nu definiëren we dat $w(t)$ links ligt van de lijn $l_{uv}(t)$ op $t = 0$ als de coëfficiënt van de laagste macht van t in $D(t)$ positief is, enz. In ons voorbeeld is die coëfficiënt 16, en inderdaad ligt q_3 links van de lijn $l_{q_1 q_2}$ voor kleine t . Merk wel op dat deze definitie de situatie beschrijft die aansluit bij kleine *positieve* t .

Door deze ideeën nader uit te werken is het niet moeilijk een algoritme te ontwerpen dat een limiet Voronoi toekent aan een verzameling tijdsafhankelijke punten dat samenvalt op $t = 0$. Als je wilt lezen hoe dit verder gaat, kan je Hoofdstuk 4 van mijn proefschrift lezen, [2]. Daar wordt ook uitgelegd wat er gebeurt met verdwijnende cellen, zoals de cel van punt q_4 in Figuur 5.

Voronoi diagrammen binnen de Universiteit Utrecht.

Op verschillende plekken binnen de Universiteit Utrecht wordt met Voronoi diagrammen gewerkt. Bij Informatica is een groep mensen actief in de zogenaamde ‘Computational Geometry’, [1]. Deze discipline onderzoekt hoe je efficiënt kan rekenen, met een computer, aan allerlei praktische meetkundige problemen. Voronoi diagrammen vervullen hierbij een belangrijke rol, denk maar aan het voorbeeld van de supermarkten. Andere mensen, [4, 5] gebruiken Voronoi diagrammen bij het simuleren van systemen van deeltjes. Zelf heb ik een proefschrift, [2], geschreven onder leiding van Dirk Siersma, die Voronoi diagrammen bestudeert vanuit een zuiver wiskundige achtergrond, [3].

Referenties

- [1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
www.cs.uu.nl/geobook/
- [2] R. C. Lindenbergh. *Limits of Voronoi diagrams*. PhD thesis, Utrecht University, 2002.
www.geo.tudelft.nl/~lindenbe/voronoi.html
- [3] D. Siersma. Properties of conflict sets in the plane. In *Geometry and Topology of Caustics*, volume 50, pages 267–276. Banach Center Publications, 1999.
www.math.uu.nl/people/siersma/vormorse.ps.gz
- [4] M. A. Stijnman, R. H. Bisseling, and G. T. Barkema. Partitioning 3D space for parallel many-particle simulations. *Computer Physics Communications*, 149(3):121–134, 2003.
www.math.uu.nl/people/bisseling/preprint1192.ps
- [5] R. Vink. *Computer Simulations of Amorphous Semiconductors*. PhD thesis, Utrecht University, 2002.
sokrates.physik.uni-mainz.de/~vink/12ABxx/articles/phdthesis-vink.pdf